Feuille d'exercices : *Nombres réels*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Exercice 1. *Montrer que :* $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Montrer que :*

1) $|x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$.

2) $1+|xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$.

Exercice 3. ***Inégalité de Cauchy-Schwarz.***
Soit $n \in \mathbb{N}^*, x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ *des nombres réels.*

1) *Montrer l'inégalité suivante dite de Cauchy-Shwarz.*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Indication : Ecrire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(tx_i+y_i)^2$ *sous la forme* at^2+bt+c, *étudier son signe puis en déduire celui du déscriminant associé.*

2) *En déduire l'inégalité dite de Hölder :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Indication : Ecrire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i+y_i) + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i+y_i)$, *puis utiliser l'inégalite de Cauchy-Schwarz pour les deux sommes.*

Exercice 4. ***Inégalite arithmico-géométrique.***
On se propose de montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$ *la propriété suivante :* $\forall\,(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}_+^n,\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leq n \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \leq 1$

1) *Vérifier le résultat pour* $n=1$.

2) *On suppose le résultat vrai pour toute famille à* n *éléments, et soit* $(x_i)_{1\leq i\leq n+1} \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ *tel que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i \leq n+1$.

a) *Montrer que :* $\exists i \in [|1, n+1|]$ *tel que* $x_i \leq 1$.
On prend $i=n+1$, *quitte à changer les indices..*

b) *Appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille* $y_i = \dfrac{n}{n+1-x_{n+1}} x_i$ *où* $1 \leq i \leq n$, *puis en déduire que :*

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i \leq x_{n+1}\left(\frac{n+1-x_{n+1}}{n}\right)^n$$

c) *Etudier sur* $[0,1]$, *la fonction* $f(t) = t\left(\dfrac{n+1-t}{n}\right)^n$.

d) *Conclure.*

3) *En déduire que* $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

Exercice 5. *Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall\varepsilon>0$ on ait : $a<b+\varepsilon$*
Montrer que : $a\leq b$.
On demande de faire un raisonnement rigoureux et surtout de ne pas répondre “on fait tendre ε vers zéro” .

Exercice 6. *Principe des pigeoniers.*

1) *Enoncer le lemme des tiroirs .*

2) *Soit $n\in\mathbb{N}$ et $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ une famille de réels tous dans l'intervalle $[0,1]$. Montrer que : $\exists(i,j)\in[0,1]^2$ tel que $i\neq j$ et $|x_i-x_j|\leq\dfrac{1}{n}$.*

3) *Soit $(x,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$. Montrer que :*

$$\exists(p,q)\in\mathbb{N}\times[|1,n|]\ \text{ tel que }\ \left|x-\frac{p}{q}\right|\leq\frac{1}{q^2}$$

Indication : Prendre $x_i=ix-E(ix)$ avec $i\in[|0,n|]$.

Exercice 7. *Manipulation des sommes.*
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n},(b_i)_{1\leq i\leq m}$ deux familles de réels.

1) *Démontrer que :*
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)=n\sum_{i=1}^n a_ib_i-\sum_{1\leq j<k\leq n}(a_k-a_j)(b_k-b_j).$$

2) *En déduire que :*

a) Si les deux suites sont croissantes, alors :
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)\leq n\sum_{i=1}^n a_ib_i.$$

b) Si l'une des deux suites est croissante et l'autre décroissante, alors
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)\geq n\sum_{i=1}^n a_ib_i.$$

Exercice 8. *Opérations sur les max et min.*
Soient A,B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées.

1) *On suppose $A\subset B$, montrer que :* $\begin{array}{l}\sup(A)\leq\sup(B)\\ \inf(A)\geq\inf(B)\end{array}$.

2) *On suppose $A\cap B\neq\emptyset$, montrer que :*

$$\begin{array}{l}\sup(A\cup B)=\max\{\sup(A),\sup(B)\},\\ \sup(A\cap B)\leq\min\{\sup(A),\sup(B)\}\\ \inf(A\cup B)=\min\{\inf(A),\inf(B)\}\\ \inf(A\cap B)\geq\max\{\inf(A),\inf(B)\}\end{array}$$

3) *On note par A+B l'ensembles des réels de la forme a+b tels que $a\in A,b\in B$. Montrer que* $\begin{array}{l}\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)\\ \inf(A+B)=\inf(A)+\inf(B)\end{array}$.

4) *On note par -A l'ensembles des réels de la forme -a tels que $a\in A$. Montrer que :* $\begin{array}{l}\sup(-A)=-\inf(A)\\ \inf(-A)=-\sup(A)\end{array}$.

5) *On note par A-B l'ensembles des réels de la forme a-b tels que $a\in A,b\in B$. Montrer que :* $\begin{array}{l}\sup(A-B)=\sup(A)-\inf(B)\\ \inf(A-B)=\inf(A)-\sup(B)\end{array}$.

6) *On note par AB l'ensembles des réels de la forme ab tels que $a\in A,b\in B$.*
On suppose $A\subset\mathbb{R}^+,B\subset R^+$, montrer que :

$$\begin{array}{l}\sup(AB)=\sup(A)\sup(B)\\ \inf(AB)=\inf(A)\inf(B)\end{array}$$

Donner des relations indentiques dans les cas suivants :
- $A\subset\mathbb{R}^+,B\subset\mathbb{R}^-$
- $A\subset\mathbb{R}^-,B\subset\mathbb{R}^-$

Exercice 9. *Déterminer, quand elles existent, les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :*

1) $A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n \text{ tel que } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2) $B = \left\{n^2 + \frac{1+(-1)^n}{n} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

3) $C = \left\{E(x) + E\left(\frac{1}{x}\right) \text{ tel que } x > 0\right\}$.

4) $D = \left\{\frac{p-q}{p+q+1} \text{ tel que } (p,q) \in \mathbb{N}^2; p \geq q\right\}$.

5) $E = \left\{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \text{ tel que } (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}$.

6) $F = \left\{1 - \frac{1}{n-m} \text{ tel que } (n,m) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } n \neq m\right\}$.

Exercice 10. ***Racine carrée.***

1) *Pour* $a \in [1, +\infty[$, *simplifier* $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

2) *Résoudre l'équation* $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$ *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. ***Puissances.***

1) *Soient* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ *et* $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$. *Montrer que* $(x+y)^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$.

2) *Soient* $a \in \mathbb{R}^+$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $(1+a)^n \geq 1 + na$.

3) *Soient* a *et* b *deux nombres réels tels que* $0 < a < b$ *et* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. *Montrer que* $n(b-a)a^{n-1} \leq b^n - a^n \leq n(b-a)b^{n-1}$.

4) *Soient* a, b *et* c *trois nombres réels positifs ou nuls. Montrer qu'au moins un des trois nombres réels* $a(1-b)$, $b(1-c)$ *ou* $c(1-a)$ *est inférieur à* $\frac{1}{4}$.

Exercice 12. ***Système non linéaire.***

1) *Soient* $x_1, \dots, x_n$ *des nombres réels tels que* $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ *et* $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$.
Montrer que $x_i = 1$ *pour tout* $i \in [|1, n|]$.

2) *On suppose que* $(x,y,z,t) \in (\mathbb{R}^*)^4$ *vérifie le système*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & t \\ \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & + & \frac{1}{z} & = & \frac{1}{t} \end{array}\right.$$

tablir que $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$, *et en déduire la forme générale des solutions du système ci-dessus.*

Exercice 13. ***Point fixe.***

Soit $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ *croissante.*
On pose $A = \{x \in [a,b] \text{ tel que } f(x) \geq x\}$

1) *Montrer que* A *est non vide majoré.*
On pose $c = \sup(A)$.

2) *Montrer que* $f(c) \geq c$ *puis* $f(c) \leq c$.

3) *Conclure.*

Exercice 14. ***Partie entière.***

Soit $n \in \mathbb{N}^*, (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer les propriétes suivantes :

1) $E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$.

2) $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right) = E(x)$.

Indication : On pourra considérer la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right)$, montrer que $f(x+1) = f(x) + 1, \quad f(x) = E(x) \quad \forall x \in [0,1[$, puis conclure.

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$.

Indication : On pourra utiliser la question précédente.

5) $0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n-1$.

6) *Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :*

$$E\left(\frac{a}{b}\right) + E\left(\frac{a+1}{b}\right) + \cdots + E\left(\frac{a+b-1}{b}\right) = a.$$

7) *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :*

$$E\left(\frac{a}{b}\right) + E\left(\frac{a+1}{b}\right) + \cdots + E\left(\frac{a+b-1}{b}\right) = E(a).$$

8) *a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :*

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}.$$

b) En déduire la valeur de $E\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Fin.