

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ إِنَّمَا أَدَّبْتُ الْقُرْآنَ وَمَنْ أَدَّبْتُمْ فَلَا بَأْسَ عَلَيْكُمْ خَشِيتُمُ اللَّهَ الرَّحْمَنَ الْعَظِيمَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

Feuille d'exercices: *Sous espaces vectoriels*

HX5-MPSI, CPGE My Youssef, Rabat



18 novembre 2008

Citations du jour :

- Faire des mathématiques, c'est donner le même nom à des choses différentes.
- Le seul objet naturel de la pensée mathématique, c'est le nombre entier.
- Les mathématiciens n'étudient pas des objets mais les relations entre ces objets.

Mathématicien du jour :

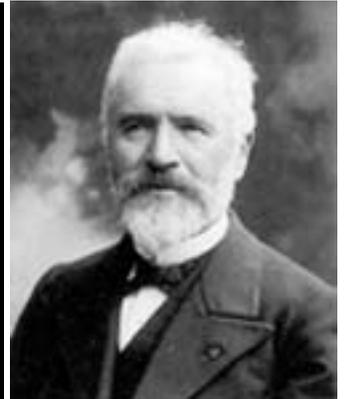
Jordan

Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) est un mathématicien français, de père polytechnicien. Il fut ingénieur au corps des mines puis plus tard, enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville au Collège de France.

Elu membre étranger de la Royal Society et décoré Officier de la Légion d'Honneur.

Connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse.

On lui doit la méthode du pivot ou d'élimination de Gauss-Jordan). Cette méthode doit son nom aux mathématiciens Carl Friedrich Gauss et Wilhelm Jordan, sous le titre « Fang cheng » (la disposition rectangulaire).



Exercice 1 On considère m un nombre complexe non nul, et on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer $(A + I_3)(A - 2I_3)$.
En déduire que A est inversible, puis calculer A^{-1} .
- 2) Soit $B = \frac{1}{3}(A + I_3)$, $C = -\frac{1}{3}(A - 2I_3)$.
Calculer B^2, C^2 , puis en déduire B^n, C^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de A et I_3 .
- 4) Retrouver le résultat du c) en calculant le reste de la division euclidienne de X^n par : $(X + 1)(X - 2)$.

Exercice 2 Dans tout l'exercice $n \geq 2$.

- 1) Etudier sur \mathbb{R} suivant la parité de n les variations de $f_n : x \rightarrow x^{n+1} + x^n$.
- 2) Vérifier que $f_n(-\frac{n}{n+1}) < 2$.
- 3) En déduire, suivant la parité de n , le nombre de solutions de l'équation : $f_n(x) = 2$.
- 4) Soit A la matrice carré d'ordre 2 formée par des 1 partout, trouver P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5) Soit E_n l'équation matricielle $X^{n+1} + X^n = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que la résolution de cette équation peut se ramener à celle de $(E'_n) : Y^{n+1} + Y^n = B$ d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- 6) Montrer que $BY = YB$.
- 7) Si $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, montrer que $b=c=0$.
- 8) Quelles sont les valeurs possibles de a .
- 9) Discuter suivant les valeurs de n le nombre de solutions de (E_n) .

Exercice 3 On note

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{A} = \{aU + bI_n, a, b \in \mathbb{R}\} \quad (n \geq 2)$$

- 1) Calculer U^2 , en déduire U^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 2) Montrer que \mathcal{A} est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner sa dimension.
- 3) Soit $M = aU + bI \in \mathcal{A}$.
Exprimer M^2 en fonction de M et I_n .
En déduire que M est inversible si et seulement si $b(b + na) \neq 0$, et dans ce cas $M^{-1} \in \mathcal{A}$.
- 4) Trouver les matrices $M \in \mathcal{A}$ vérifiant : $M^n = I_n$.

Exercice 4 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- 1) Calculer $J(1)^2$ en fonction de $J(1)$.
- 2) Exprimer $J(\lambda)$ en fonction de $J(1)$ et I_n .
En déduire $J(\lambda)^2$ en fonction de $J(\lambda)$ et I_n .
- 3) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que $J(\lambda)$ soit inversible, exprimer dans ce cas $J(\lambda)^{-1}$ en fonction de $J(\lambda)$.

Exercice 5 Matrices centrosymétriques.

Ce sont les matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$a_{n+1-i, n+1-j} = a_{i,j}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

- 1) Donner un exemple pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.
- 2) Montrer que si A et B sont centro-symétriques, il en est de même de AB .

Exercice 6 Matrices d'une permutation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on pose $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$. Avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$,
 $= 0$ si $i \neq j$

appelé symbole de Kroeneker

- 1) Calculer P_σ , pour $n = 4$, $\sigma = (1\ 2)$, $\sigma = (1\ 2\ 3)$ et $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$.
- 2) Montrer que $P_\sigma \cdot P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.
- 3) Calculer P_{id} , en déduire que P_σ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 7 Matrices en damier.

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est en damier si $a_{ij} = 0$ pour $j - i$ impair. On note par \mathcal{D} l'ensemble de telle matrices.

Montrer que \mathcal{D} est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Quelle est sa dimension ?

Exercice 8 Matrices stochastiques.

Soit $\mathcal{D} = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } : a_{ij} \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall i, j \right\}$.

- 1) Donner un exemple pour $n = 2$ et un pour $n = 3$.
- 2) Montrer que \mathcal{D} est stable par multiplication.
- 3) Démontrer les matrices $A \in \mathcal{D}$ inversibles telles que $A^{-1} \in \mathcal{D}$ sont celles dont chaque colonne contient $n - 1$ fois 0 et une fois 1.
- 4) Montrer qu'il s'agit là d'une matrice de permutation.

Exercice 9 Calculer les puissances successives de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{bmatrix}$$

où a et b sont deux nombres complexes.

Indication : On pourra écrire A sous la forme $aJ + bI_3$.

Fin