CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

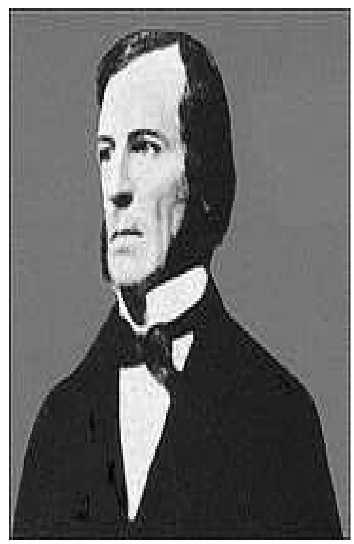
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Feuille d'exercices: *Structures algébriques*

28 février 2009

Énigme du jour :
3 amis sont au restaurant. Après leur repas, l'addition s'élève a 30 dhs. Ils donnent chacun 10 dhs. Le serveur s'aperçoit qu'il s 'est trompé dans les comptes et qu'en fait ils ne doivent payer que 25 dhs.
Comme 5 dhs n'est pas divisible en 3, il décide de garder 2 dhs de pourboire et de leur rendre le reste. Ainsi les amis se partagent les 3 dhs et ils ont donc payé le repas 3 fois 9 = 27 dhs plus les 2 dhs du serveur, cela donne 29 dhs !
Où est passé le dernier dh ?

Mathématicien du jour ***Boole***
George Boole (1815-1864) est un logicien, mathématicien et philosophe britannique. Il est le créateur de la logique moderne, que l'on appelle algèbre de Boole en son honneur.
Autodidacte, il publia ses premiers travaux tout en exerçant son métier d'instituteur et de directeur d'école primaire. En effet, issu d'une famille pauvre, George Boole n'a pas les moyens financiers d'aller à l'université, il fût obligé de travailler pour soutenir sa famille, il devient enseignant à 16 ans. Quatre ans plus tard, il fonde et dirige sa propre école. Ses travaux lui valurent la *Royal Medal* de la *Royal Society*.
Il épouse *Mary Everest*, nièce de *Sir George Everest*, le responsable de la mission cartographique qui baptisa *le mont Everest*.
Il mourra d'une pneumonie après avoir pris froid en se rendant à son travail. Croyant au principe d'analogie, son épouse l'avait alité et aspergé d'eau pour le guérir.



Exercice 1 **. Soit $(E,.)$ un magma tel que :**

$$\begin{cases} \forall x \in E & x.x = x \\ \forall (x,y,z) \in E^3 & (x.y).z = (y.z).x \end{cases}$$

Montrer que . est commutative.

Exercice 2 . **Soit E ensemble fini non vide muni d'une LCI associative et commutative.**

1) **On suppose que tous ses éléments sont réguliers, montrer que c'est un groupe.**
2) **On suppose que $\forall (x,y) \in E^2 \quad \exists ! a \in E$ tel que $y = a.x$, montrer que c'est un groupe.**
3) **Reprendre les questions précédentes on supposant cette fois que la LCI est seulement associative.**

Exercice 3 . **Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G.**

Exercice 4 . **Soit $(E, .)$ un magma, pour toute partie A de E, on appelle centre de A, l'ensemble noté $c(A)$ défini par :**

$$c(A) = \{x \in E \text{ tel que } a.x = x.a \quad \forall a \in A\}$$

Montrer les propriétés suivantes :

1) $\forall A \in P(E)$ **on a :** $A \subset c(c(A))$.
2) $\forall (A, B) \in P(E)^2 : A \subset B \Longrightarrow c(B) \subset c(A)$.
3) $\forall A \in P(E) : c(A) = c(c(c(A)))$.
4) $(E, .)$ **groupe** $\Longrightarrow (c(E), .)$ **groupe .**

Exercice 5 . **Soit $(G, .)$ un groupe, $(a, b, c) \in G^3$ fixes et e neutre pour ., montrer les résultats suivants :**

1) $\left(a^5 = e, ab = ba^3\right) \Longrightarrow \left(a^2 b = ba, ab^3 = b^3 a^2\right)$
2) $\left(b^6 = e, ab = b^4 a\right) \Longrightarrow \left(b^3 = e, ab = ba\right)$
3) $\left(a^5 = e, aba^{-1} = b^2\right) \Longrightarrow b^{31} = e$
4) $(ab)^{-1} = a^{-1} b$ **et** $(ba)^{-1} = b^{-1} a \Longrightarrow \left(a^2 = b^2, a^2 b^2 = e\right)$
5) $\left(a^{-1} ba = b^{-1}, b^{-1} ab = a^{-1}\right) \Longrightarrow a^4 = b^4 = e$
6) $\left((aba) = b^3, b^5 = e\right) \Longrightarrow \left(ab = ba, a^2 = b^2\right)$

Exercice 6 . **Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ on définit la LCI suivante :**

$$(a, b) * (c, d) = (ac, \frac{d}{a} + bc)$$

montrer que ça définit une structure de groupe, s'agit-il d'un groupe abelien ?

Exercice 7 . **Soit G un groupe , pour tout $a \in G$, H, K des sous groupes de G on pose :**
– aH **l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $a.h$ où $h \in H$**
– Ha **l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $h.a$ où $h \in H$**
– HK **l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $h.k$ où $(h,k) \in H \times K$**

1) **Montrer que aHa^{-1} est sous-groupe de G**
2) **Montrer que : aH sous groupe de $G \Longleftrightarrow \quad a \in H$**
3) **Montrer que Ha sous groupe de $G \Longleftrightarrow \quad a \in H$**
4) **Montrer que HK sous groupe de $G \Longleftrightarrow HK = KH$**
   Indication : Montrer d'abord que $x \in HK \Longleftrightarrow x^{-1} \in KH$.

Exercice 8 . **Soit** $(A,+,.)$ **un anneau commutatif,** $\forall (x,n)\in A$ **x** $\mathbb{N}^*$ **on pose :**

$$\begin{array}{ll} f_0(x)=1_A & f_1(x)=x \\ f_2(x)=x(x-1_A) & f_n(x)=x(x-1_A)\dots(x-(n-1)1_A) \end{array}$$

Montrer que :

$$\forall (x,y)\in A^2 :\quad f_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k f_{n-k}(x)f_k(y)$$

Exercice 9 . **Théorème de THEON DE SMYRNE, mathématicien grec.**
Soit $(G,+)$ **un groupe abélien.**

1) **Montrer que :** $\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2, \forall s\in\mathbb{Z}, \forall (x,x_n,x_{n+1},,x_{n+m})\in G^{m+2}$ **on a :**

$$\sum_{i=n}^{n+m}(sx_i+x)=s\left(\sum_{i=n}^{n+m}x_i\right)+(m+1)x$$

2) **En déduire que :** $\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2$ **on a :** $\sum\limits_{i=n}^{n+m}(2i+1)=(m+1)(2n+m+1)$

3) **En déduire que :** $\forall m\in\mathbb{N},\quad m^2$ **est la somme des** m **premiers nombres impairs.**

Exercice 10 . **L'ensemble** $\mathbb{R}^2$ **des couples de réels est muni de deux lois notées** $+$ **et** $*$ **définies de la façon suivante :**

$$(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')\quad ;\qquad (a,b)*(a',b')=(aa',ab'+ba')\ .$$

1) **Montrer que** $(\mathbb{R}^2,+,*)$ **est un anneau commutatif.**

2) **Quels sont les éléments inversibles de cet anneau ? Lorsque l'élément** (a,b) **est inversible, quelle est l'expression de son inverse** $(a,b)^{-1}$ **?**

3) **Soit** $n\in\mathbb{N}^*$**, soit** $(a,b)\in$ 2**. On note**

$$(a,b)^n=\underbrace{(a,b)*(a,b)*\cdots*(a,b)}_{n\quad fois}$$

Donner une expression simple de $(a,b)^n$**.**

Exercice 11 . **Transport de structure.**
Soit $(G,.)$ **un groupe,** E **un ensemble, et** $\phi:G\longrightarrow E$ **une bijection. On définit une opération** $\star$ **sur** E **par :**

$$\forall\ x,y\in E,\ \ x\star y=\phi\Big(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\Big).$$

Montrer que $\star$ **est une loi de groupe et que les groupes** G **et** E **sont isomorphes via** ϕ**.**

Exercice 12 .

1) **Soit** $\mathbb{K}$ **un corps contenant** $\mathbb{Q}$**, et** $f:\mathbb{K}\longrightarrow\mathbb{K}$ **un automorphisme de corps, montrer que** $f(x)=x\forall x\in\mathbb{Q}$**.**

2) **Montrer que** $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{x=a+b\sqrt{2}$ **tel que** $a,b\in\mathbb{Q}\}$ **est un corps.**

3) **En déduire que les seuls automrphismes de corps sur** $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ **sont l'identite et l'application** $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ & a+b\sqrt{2} & \longmapsto & a-b\sqrt{2} \end{array}$ **.**

Exercice 13 . ***Anneaux booléens, (Georges Boole).***
Soit $(A,+,.)$ **un anneau tel que** $x^2=x, \quad \forall x\in A$.

1) **Montrer alors que :** $\forall x\in A; \quad 2x=0_A$
2) **En déduire ensuite que** A **est commutatif.**
   Indication. on pourra développer $(x+y)^2$.
3) **Montrer que** A **ne peut pas possèder exactement 3 élèments.**
4) **Démontrer que si card**$A\,2$, **alors** A **n'est pas intègre.**
   Indication **: Calculer** $x(x+1_A)$.
5) **Montrer que tout anneau booléen fini, est de cardinal une puissance de 2.**
6) **Vérifier que** $(\mathcal{P}(E),\cap,\Delta)$ **est un anneau booléen.**

Exercice 14 . **Éléments nilpotents.**
Soit $(A,+,.)$ **un anneau commutatif on dit qu'un élément** $x\in A$ **est nilpotent si :** $\exists n\in\mathbb{N}^*: x^n=0_A$.

1) **Montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents sont aussi nilpotents.**
   Indication. On pourra montrer que :
   $x^n=y^m=0_A \Longrightarrow (xy)^n=(x+y)^{n+m-1}=0_A$.
2) **Soit** a **nilpotent, montrer que** 1_A-a **et** 1_A+a **sont inversibles.**
   Indication : Penser à la factoriser de a^n-b^n.
3) **Soit** a **nilpotent, et** b **inversible, montrer que** $a+b$ **et** $a-b$ **sont inversibles, préciser leurs inverses.**

Définition 1 . Dans toute la suite, si E **est un ensemble fini, on notera card**(E) **pour designer le nombre de ses élèments.**
On admettera, que toute application injective ou surjective entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective.

Exercice 15 . **Soit** $(G,.)$ **un groupe fini et** H,K **deux sous-groupes de** G.
On considère l'application $H\times K$ **muni de la loi . définie par** $(a,b).(c,d)=(a.b,c.d)$ **est un groupe.** $\begin{array}{rccc}\phi: & H\times K & \longrightarrow & G\\ & (h,k) & \longmapsto & h.k\end{array}$

1) **Montrer que** $(H\times K,.)$ **est un groupe.**
2) **Est-ce que** ϕ **est un morphisme de groupes ?**
3) **Soit** $z\in HK$, $z=h_0.k_0$ **avec** $h_0\in H$ **et** $k_0\in K$.
   Montrer que les antécédents de z **par** ϕ **sont les couples** $(h_0.t,t^{-1}.k_0)$ **avec** $t\in H\cap K$.
4) **En déduire que : card**(HK) **card**$(H\cap K)=$ **card**(H) **card**(K).

Exercice 16 . **Entiers de Gauss.**
Soit $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi$ **tel que** $: a,b\in\mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Q}[i]=\{a+bi$ **tel que** $: a,b\in\mathbb{Q}\}$.

1) **Montrer que** $\mathbb{Q}[i]$ **est un sous-corps de** $(\mathbb{C}^*,\times)$
2) **Montrer que** $\mathbb{Z}[i]$ **est un sous-anneau de** $\mathbb{Q}[i]$. **Quels sont les éléments inversibles ?**
3) **Montrer que** $\forall z\in\mathbb{Q}[i], \exists z'\in\mathbb{Z}[i]$ **tel que** $|z-z'|<1$.
4) **Soient** $u,v\in\mathbb{Z}[i]$ **avec** $v\neq 0$. **Montrer qu'il existe** $q,r\in\mathbb{Z}[i]$ **tels que** $u=qv+r$ **et** $|r|<|v|$.
5) **A-t-on unicité ?**

Exercice 17 . Intégre et fini est corps.
Soit A un anneau non nul, commutatif et intègre.

1) **Montrer que $\forall a \neq 0_A$, l'application** $\begin{array}{rccc} \phi_a : & A & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & a.x \end{array}$ **est injective.**
2) **En déduire que si A est fini, alors c'est un corps.**

Exercice 18 . Translations surjectives.
Soit G un ensemble non vide muni d'une opération interne $\cdot$ associative telle que :

$$\forall\ a, b \in G,\ \exists\ x, y \in G \text{ tel que } : a = x \cdot b = b \cdot y.$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

Exercice 19 . Images directes et réciproques.
Soit G un groupe additif et $f : (G, .) \longrightarrow (G', *)$ un morphisme de groupes.

1) **Montrer que pour tout sous-groupe H de G on a :** $f^{-1}(f(H)) = H.\mathbf{Ker}\, f$.
2) **Montrer que pour tout sous-groupe H' de G' on a :** $f(f^{-1}(H')) = H' \cap \mathbf{Im}\, f$.

Exercice 20 . Caractéristique d'un anneau.
Soit A un anneau. On appelle *caractéristique* de A, le plus petit entier, quand il existe, $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n1_A = 0_A$, sinon on dit que A est de caractéristique nulle.

1) **Préciser la caractéristique de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.**
   On suppose dans le suite que A est de caractéristique, $n \neq 0$.
2) **Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}^*\ m1_A = 0 \Longrightarrow n$ divise m.**
3) **Montrer que : $\forall\ x \in A,\ nx = 0_A$.**
4) **Montrer que : $pq1_A = p1_A q1_A \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$.**
5) **Si A est intègre, montrer que n est un nombre premier.**
6) **Si A est intègre et commutatif, montrer que $x \mapsto x^n$ est un morphisme d'anneau.**

Exercice 21 . Anneau de caractéristique 2.
Soit A un anneau non nul tel que : $\forall\ x \in A,\ x^2 = x$.

1) **Exemple d'un tel anneau ?**
2) **Quels sont les éléments inversibles de A ?**
3) **Montrer que : $\forall\ x \in A,\ x + x = 0$. En déduire que A est commutatif.**
4) **Pour $x, y \in A$ on pose : $x \leq y \Longleftrightarrow \exists\ a \in A$ tel que $: x = ay$. Montrer que c'est une relation d'ordre, qui est totale si A est un corps.**

Exercice 22 . Entiers 2-adiques.
Soit $A = \{m/n \in \mathbb{Q}$ tel que $: n$ est impair$\}$.

1) **Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.**
2) **Chercher les éléments inversibles dans A.**

***Dans toute la suite,* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.**

Exercice 23 . Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g : E \to E$ linéaires.
Montrer que : $f(\ker g \circ f) = \ker g \cap\ \mathbf{Im} f$

Exercice 24 . **Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et f, g deux endomorphismes de E.**
Montrer que : $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow$ **Im**$f \subset \ker g$.

Exercice 25 . **Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E.**
Montrer que : **Im**$f \cap \ker f = \{0_E\} \Longleftrightarrow \ker f = \ker f^2$.

Exercice 26 ..

1) **Montrer que tout $\mathbb{R}$-endomorphisme, $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme :** $f(z) = az + b\overline{z}$ **où** $a, b \in \mathbb{C}$ **des constantes à exprimer en fonction de** $f(1)$ **et** $f(i)$.
2) **Montrer que f injectif** $\Leftrightarrow |a| \neq |b|$.

Exercice 27 . **Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = id_E$.**
Montrer que : $(g \circ f)^2 = g \circ f$
Im$g \circ f =$ **Im**g
$\ker g \circ f = \ker f$

Exercice 28 . ***Commutants itérés :***
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$: $\varphi(v) = v \circ u - u \circ v$, et on note $C_i = \ker \varphi^i$, ainsi $C_0 = 0$, C_1 est le commutant de u, C_2 est l'ensemble des v tels que $v \circ u - u \circ v$ commute avec u,...).

1) **Calculer $\varphi(v \circ w)$ en fonction de $v, w, \varphi(v)$ et $\varphi(w)$.**
2) **Montrer que** $C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ **est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ appelée *Commutant* de $\mathcal{L}(E)$.**

Exercice 29 . **Soit** $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & g \mid g(x) = xf(x) \end{array}$ **et** $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$.

1) **Montrer que u et v sont des endomorphismes d'espaces vectoriels.**
2) **Sont-ils des endomorphismes d'algèbres ?**
3) **Déterminer $v \circ u - u \circ v$.**
4) **En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $v \circ u^n - u^n \circ v = nu^{n-1}$.**

Exercice 30 . **Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$.**

1) **Montrer que $v \circ u = 0$ si et seulement si Im$u \subset \ker v$.**
2) **Comparer $\ker(v \circ u)$ et $\ker u$; Im$(v \circ u)$ et Imv.**
3) **Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k = \ker u^k$ et $I_k =$ Imu^k. Montrer que :**
   a) **Préciser I_0 et N_0.**
   b) **$\forall k \geq 1$, on a : $u(N_k) \subset N_{k-1}$ et $u(I_k) = I_{k+1}$**
   c) **$N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.**
   d) **Si $N_k = N_{k+1}$, alors $\forall q \geq k, N_q = N_k$.**
   e) **Si $I_k = I_{k+1}$, alors $\forall q \geq k, I_q = I_k$.**

Fin
à la prochaine