Feuille d'exercices : *Structures algèbriques.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسوُلَهُ وَ المُؤ مِنِين
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Exercice 1. Soit $(E,.)$ un magma tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in E & x.x = x \\ \forall (x,y,z) \in E^3 & (x.y).z = (y.z).x \end{cases}$$

Montrer que . est commutative.

Exercice 2. Soit E ensemble fini non vide muni d'une LCI associative et commutative.

1) On suppose que tous ses éléments sont réguliers, montrer que c'est un groupe.
2) On suppose que $\forall (x,y) \in E^2 \quad \exists! a \in E$ tel que $y = a.x$, montrer que c'est un groupe.
3) Reprendre les questions précédentes on supposant cette fois que la LCI est seulement associative.

Exercice 3. Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 4. Soit $(E,.)$ un magma, pour toute partie A de E, on appelle centre de A, l'ensemble noté $c(A)$ défini par :

$$c(A) = \{x \in E \text{ tel que } a.x = x.a \quad \forall a \in A\}$$

Montrer les propriétés suivantes :

1) $\forall A \in P(E)$ on a : $A \subset c(c(A))$.
2) $\forall (A,B) \in P(E)^2 : A \subset B \Longrightarrow c(B) \subset c(A)$.
3) $\forall A \in P(E) : c(A) = c(c(c(A)))$.
4) $(E,.)$ groupe $\Longrightarrow (c(E),.)$ groupe .

Exercice 5. Soit $(G,.)$ un groupe, $(a,b,c) \in G^3$ fixes et e neutre pour ., montrer les résultats suivants :

1) $(a^5 = e, ab = ba^3) \Longrightarrow (a^2b = ba, ab^3 = b^3a^2)$
2) $(b^6 = e, ab = b^4a) \Longrightarrow (b^3 = e, ab = ba)$
3) $(a^5 = e, aba^{-1} = b^2) \Longrightarrow b^{31} = e$
4) $(ab)^{-1} = a^{-1}b$ et $(ba)^{-1} = b^{-1}a \Longrightarrow (a^2 = b^2, a^2b^2 = e)$
5) $(a^{-1}ba = b^{-1}, b^{-1}ab = a^{-1}) \Longrightarrow a^4 = b^4 = e$
6) $((aba) = b^3, b^5 = e) \Longrightarrow (ab = ba, a^2 = b^2)$

Exercice 6. Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ on définit la LCI suivante :

$$(a,b)*(c,d) = (ac, \frac{d}{a} + bc)$$

montrer que ça définit une structure de groupe, s'agit-il d'un groupe abelien ?

Exercice 7. Soit G un groupe , pour tout $a \in G$, H, K des sous groupes de G on pose :

- aH l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $a.h$ où $h \in H$
- Ha l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $h.a$ où $h \in H$
- HK l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $h.k$ où $(h,k) \in H \times K$

1) Montrer que aHa^{-1} est sous-groupe de G
2) Montrer que : aH sous groupe de $G \Longleftrightarrow \quad a \in H$
3) Montrer que Ha sous groupe de $G \Longleftrightarrow \quad a \in H$
4) Montrer que HK sous groupe de $G \Longleftrightarrow HK = KH$
Indication : Montrer d'abord que $x \in HK \Longleftrightarrow x^{-1} \in KH$.

Exercice 8. Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif, $\quad \forall (x,n) \in A$ x $\mathbb{N}^*$ on pose :

$$\begin{array}{ll} f_0(x) = 1_A & f_1(x) = x \\ f_2(x) = x(x-1_A) & f_n(x) = x(x-1_A)\dots(x-(n-1)1_A) \end{array}$$

Montrer que :

$$\forall (x,y) \in A^2 : \quad f_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f_{n-k} x f_k(y)$$

Exercice 9. Théorème de THEON DE SMYRNE, mathématicien grec.
Soit $(G,+)$ un groupe abélien.

1) Montrer que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \forall s \in \mathbb{Z}, \forall (x, x_n, x_{n+1}, , x_{n+m}) \in G^{m+2}$ on a :
$$\sum_{i=n}^{n+m} (sx_i + x) = s\left(\sum_{i=n}^{n+m} x_i\right) + (m+1)x$$
2) En déduire que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$ on a : $\sum_{i=n}^{n+m} (2i+1) = (m+1)(2n+m+1)$
3) En déduire que : $\forall m \in \mathbb{N}, \quad m^2$ est la somme des m premiers nombres impairs.

Exercice 10. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels est muni de deux lois notées $+$ et $*$ définies de la façon suivante :

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b') \quad ; \qquad (a,b)*(a',b') = (aa', ab' + ba') \ .$$

1) Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, *)$ est un anneau commutatif.
2) Quels sont les éléments inversibles de cet anneau ? Lorsque l'élément (a,b) est inversible, quelle est l'expression de son inverse $(a,b)^{-1}$?
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note
$$(a,b)^n = \underbrace{(a,b)*(a,b)*\cdots*(a,b)}_{n \quad fois}$$
Donner une expression simple de $(a,b)^n$.

Exercice 11. Fonction caractéristique.
Soit E un ensemble non vide, pour toute partie A de E on associe l'application notée φ_A définie par :

$$\varphi_A : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{array} \end{array}$$

1) **Trouver φ_E et $\varphi_\emptyset$.**
2) **Soient A et B deux parties de E montrer que :**

$$\varphi_{A\cap B} = \varphi_A\varphi_B, \quad \varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A\varphi_B$$

3) **Soient A et B deux parties de E, exprimer $\varphi_{\overline{A}}$ et $\varphi_{A\Delta B}$ en fonction de φ_A et φ_B.**
4) **Soient A et B deux parties de E,**
montrer que $\varphi_A = \varphi_B \Longleftrightarrow A = B$.
En déduire que l'application $\varphi : \begin{array}{ccl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \varphi_A \end{array}$
est injective.
5) **En déduire que si A, B et C sont trois parties de E alors : $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$, puis que Δ est associative.**
6) **Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau. Est-il intégre ?**

Exercice 12. Transport de structure.
Soit $(G, .)$ un groupe, E un ensemble, et $\phi : G \longrightarrow E$ une bijection. On définit une opération $\star$ sur E par :

$$\forall\ x, y \in E,\ x \star y = \phi\Big(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\Big).$$

Montrer que $\star$ est une loi de groupe et que les groupes G et E sont isomorphes via ϕ.

Exercice 13. Anneaux booléens.
Soit $(A, +, .)$ un anneau tel que $x^2 = x, \quad \forall x \in A$.
Montrer alors que : $\forall x \in A; \quad 2x = 0_A$
En déduire ensuite que A est commutatif.
Indication. on pourra développer $(x+y)^2$**.**

Exercice 14. Éléments nilpotents.
Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif on dit qu'un élément $x \in A$ est nilpotent si : $\exists n \in \mathbb{N}^* : x^n = 0_A$.

1) **Montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents sont aussi nilpotents.**
Indication. On pourra montrer que :
$x^n = y^m = 0_A \Longrightarrow (xy)^n = (x+y)^{n+m-1} = 0_A$.
2) **Soit a nilpotent, montrer que $1_A - a$ et $1_A + a$ sont inversibles.**
Indication : Penser à la factoriser de $a^n - b^n$**.**
3) **Soit a nilpotent, et b inversible, montrer que $a + b$ est inversible.**

Exercice 15. **Soit $(G, .)$ un groupe fini et H, K deux sous-groupes de G.**
On considère l'application $H \times K$ muni de la loi . définie par $(a,b).(c,d) = (a.b, c.d)$ est un groupe. $\phi : \begin{array}{ccl} H\times K & \longrightarrow & G \\ (h,k) & \longmapsto & h.k \end{array}$

1) **Montrer que**
2) **Est-ce que ϕ est un morphisme de groupes ?**
3) **Soit $z \in HK$, $z = h_0.k_0$ avec $h_0 \in H$ et $k_0 \in K$.**
Montrer que les antécédents de z par ϕ sont les couples $(h_0.t, t^{-1}.k_0)$ avec $t \in H \cap K$.
4) **En déduire que : $\text{card}(HK)\text{card}(H\cap K) = \text{card}(H)\text{card}(K)$.**

Exercice 16. Entiers de Gauss.
Soit $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi$ tel que $: a,b\in\mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Q}[i]=\{a+bi$ tel que $: a,b\in\mathbb{Q}\}$.

1) Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps de $(\mathbb{C}^*,\times)$
2) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[i]$. Quels sont les éléments inversibles ?
3) Montrer que $\forall\, z\in\mathbb{Q}[i], \exists z'\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $|z-z'|<1$.
4) Soient $u,v\in\mathbb{Z}[i]$ avec $v\neq 0$. Montrer qu'il existe $q,r\in\mathbb{Z}[i]$ tels que $u=qv+r$ et $|r|<|v|$.
5) A-t-on unicité ?

Exercice 17. Intégre et fini est corps.
Soit A un anneau non nul, commutatif et intègre.

1) Montrer que $\forall\, a\neq 0_A$, l'application $\phi_a : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & a.x \end{array}$ est injective.
2) En déduire que si A est fini, alors c'est un corps.

Exercice 18. Translations surjectives.
Soit G un ensemble non vide muni d'une opération interne $\cdot$ associative telle que :

$$\forall\ a,b\in G,\ \exists\ x,y\in G \text{ tel que } : a=x\cdot b=b\cdot y.$$

Montrer que $(G,\cdot)$ est un groupe.

Exercice 19. Images directes et réciproques.
Soit G un groupe additif et $f:(G,.)\longrightarrow(G',*)$ un morphisme de groupes.

1) Montrer que pour tout sous-groupe H de G on a : $f^{-1}(f(H))=H.\mathrm{Ker}\, f$.
2) Montrer que pour tout sous-groupe H' de G' on a : $f(f^{-1}(H'))=H'\cap \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 20. Caractéristique d'un anneau.
Soit A un anneau. On appelle ***caractéristique*** de A, le plus petit entier, quand il existe, $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n1_A=0_A$, sinon on dit que A est de caractéristique nulle.

1) Préciser la caractéristique de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   On suppose dans le suite que A est de caractéristique, $n\neq 0$.
2) Montrer que $\forall\, m\in\mathbb{N}^*\ m1_A=0\Longrightarrow n$ divise m.
3) Montrer que : $\forall\ x\in A,\ nx=0_A$.
4) Montrer que : $pq1_A=p1_Aq1_A \quad \forall\,(p,q)\in\mathbb{N}^2$.
5) Si A est intègre, montrer que n est un nombre premier.
6) Si A est intègre et commutatif, montrer que $x\mapsto x^n$ est un morphisme d'anneau.

Exercice 21. Anneau de caractéristique 2.
Soit A un anneau non nul tel que : $\forall\ x\in A,\ x^2=x$.

1) Exemple d'un tel anneau ?
2) Quels sont les éléments inversibles de A ?
3) Montrer que : $\forall\ x\in A,\ x+x=0$. En déduire que A est commutatif.
4) Pour $x,y\in A$ on pose : $x\leq y\Longleftrightarrow\exists\ a\in A$ tel que $: x=ay$. Montrer que c'est une relation d'ordre, qui est totale si A est un corps.

Exercice 22. Entiers 2-adiques.
Soit $A=\{m/n\in\mathbb{Q}$ tel que $: n$ est impair$\}$.

1) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2) Chercher les éléments inversibles dans A.

Fin.