CPGE My Youssef, Rabat

Prépas G.S High Tech, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ

وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Résumé de cours: *suites numériques*

26 janvier 2009

Communiqué du jour :

Mathématicien du jour ***Einstein***

.

Exercice 1 . **On considère la suite (u_n) définie par :**
$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sqrt[n]{n!}$.

1) **Montrer que :** $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k)$.
2) **Soit** $k \geq 2$. **Démontrer l'encadrement :**
$$\int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln x \, dx \, .$$
3) **En déduire un encadrement de** $\ln u_n$**, puis que :** $\lim u_n = +\infty$.
4) **Pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$**, on pose** $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. **Étudier le signe de** v_n. **En déduire le sens de variation de la suite** (u_n).

Exercice 2 . **Soit** $(u_n), (v_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ **tel que** $(u_n v_n)$ **converge vers 1, montrer que** (u_n) **et** (v_n) **convergent toutes les deux vers 1 .**

Exercice 3 . **Soit** $(a,b) \in$ ■+ **fixes. Trouver les suites réelles vérifiant :**

1) $u_0 = a,\ u_1 = b,\ u_{n+2} = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.
2) $u_0 = a,\ u_1 = b,\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} u_n}$.

Exercice 4 . **Soit** $x \in$ أ$_{*+}$ **fixe. Déterminer les limites des suites suivantes :**

$$u_n = \frac{E(nx)}{n}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{E(kx)}{n^2}, \quad w_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

On pourra utiliser les résultats suivants :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad \forall x > -1.$$

Exercice 5 . **Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.**

1) **Par récurrence, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$.**
2) **Par récurrence, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$.**
3) **La suite (S_n) est-elle convergente ?**
4) **Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.**

Exercice 6 . **Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Montrer que :**

1) $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ **convergent vers la même limite $\Longrightarrow$ (u_n) converge**
2) $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ **convergent $\Longrightarrow$ (u_n) converge.**

Exercice 7 . **Soit (u_n) une suite monotone qui admet une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente, montrer que (u_n) est aussi convergente .**

Soit $(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente et L sa limite on suppose que $L \notin \mathbb{Z}$

1) **Montrer que $E(L) < x_n < E(L) + 1$ à partir d'un certain rang.**
2) **En déduire que $(E(x_n))$ est stationnaire puis .converge vers $E(L)$**

Exercice 8 . **Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixe, on pose $u_n(m) = \sum_{k=n+1}^{nm} \frac{1}{k}$**

1) **Montrer que $u_n(m)$ est monotone puis qu'elle converge,**
   soit $L(m)$ sa limite.
2) **Monter que $L(pq) = L(p) + L(q)$ $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$**

Exercice 9 . **On pose $u_n = cos(n), v_n = sin(n)$**

1) **Exprimer u_{n+1}, v_{n+1} en fonction de u_n, v_n**
2) **Montrer que si (u_n) converge alors (u_n) et (v_n) convergent vers 0**
3) **Conclure que (u_n) et (v_n) ne peuvent pas converger**

Exercice 10 . **Calcul approché de π à l'aide de la méthode de Viete.**

1) **Soit $0 < \theta < \pi$ tel que $\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.**
   Montrer que les suites $2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et $2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ sont adjacentes.
   Calculer leurs limites communes.
2) **Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définies par :**

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} & , v_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} & , v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$$

   Montrer que : $\lim \left(v_n \sqrt{2 - u_n}\right) = \pi$.

   Indication : On pourra utiliser les relations : $\begin{cases} 1 + \cos\theta = 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \end{cases}$.

Exercice 11 . **Suites adjacentes.**

1) **Soit** $(a,b) \in$ أ$*_+$ **tel que** $a < b$**, on pose :** $\begin{cases} u_0 = a, u_1 = b \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} \end{cases}$

   a) **Montrer que** $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ **sont adjacentes.**

   b) **Calculer** $u_{n+1} - u_n$**, en déduire** $\lim u_n$.

2) **Soit** $(a,b) \in$ أ$*_+$ **tel que** $a < b$ **, on pose :**

$$\begin{cases} a_0 = a & , b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n} & , b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

   a) **Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes.**

   b) **Calculer leurs limites communes.**

Exercice 12 . **Nombre de nombres ne comportant pas 13.**
Soit T_n **le nombre d'entiers naturels de** n **chiffres exactement ne comportant pas la séquence 13 en numération décimale.**

1) **Montrer que** $T_{n+2} = 10T_{n+1} - T_n$**.**
2) **Calculer** T_n **en fonction de** n**.**
3) **On note** $x_n = (\sqrt{3}+1)^{2n+1}$**,** $y_n = (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$**, et** $z_n = [x_n]$**.**
   Montrer que $z_n = x_n - y_n$**.**
4) **En déduire que** 2^{n+1} **divise** z_n**.**

Exercice 13 . **Moyenne arithmico-géométrique.**
Soit $(a,b) \in ($أ$*_+)^2$ **tel que** $a > b$**, on pose :**

$$\begin{cases} a_0 = a & , b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & , b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

1) **Montrer que ces suites sont bien définies.**
2) **Montrer qu'elles sont adjacentes.**
   On note par $M(a,b)$ **leurs limite commune qu'on appelle moyenne** ***arithmico - géométrique*** **de** a **et** b**.**
3) **Montrer que pout tout** $n \in \mathbb{N}$ **:** $\left|a_n^2 - b_n^2\right| \leq 16b^2 \left(\dfrac{a^2 - b^2}{16b^2}\right)^{2^n}$ **.**
4) **Donner une majoration de** $|a_n - M(a,b)|$ **et** $|M(a,b) - b_n|$ **en fonction de** a, b, n
5) **En déduire une valeur approchée par défaut et une par excès de** $M(2,1)$ **à** 10^{-4} **prés.**

Exercice 14 . **Calcul approche de π à l'aide de la méthode des isopêrimétres.**

1) **Soit** $(a, b) \in (\mathbb{R}*+)^2$ **tel que** $a < b$**, on pose :**

$$\begin{cases} a_0 = a & , b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & , b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes.

2) **Exprimer leurs limites communes en fonction de** $\theta = \arccos\left(\dfrac{a}{b}\right)$**.**

Indication : On pourra d'abord commencer par exprimer les a_n, b_n ***en fonction de*** θ***.***

3) **soit** $n \in \mathbb{N}$**, et** P_n **le polygône régulier à** 2^n **côtés et de périmètre** 2**, soit** r_n **le rayon du cercle inscrit et** R_n **celui du cercle circonscrit à** P_n**, montrer que** $\forall n \geq 2$ **on a :**

$$r_{n+1} = \frac{r_n + R_n}{2}, R_{n+1} = \sqrt{r_{n+1} R_n}$$

4) **En déduire qu'elle sont adjacentes puis en remarquant que :** $\dfrac{1}{R_n} \leq \pi \leq \dfrac{1}{r_n}$ **en déduire que** $\dfrac{1}{R_n}, \dfrac{1}{r_n}$ **convergent vers** π**.**

Exercice 15 . **Comparaisons de suites numériques.**

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ **on pose** $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} dx$**.**

   a) **Montrer que** $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ **en déduire la limite de** I_n**.**

   b) **A l'aide d'une intégration par parties établir que :**

$$(n+1) I_n = e^{-1} + I_{n+1}$$

   c) **En déduire un équivalent simple de** I_n**.**

2) **Montrer les résultats suivants :**

   a) $E(n\sqrt{n+1}) + E(n\sqrt{n}) \sim 2n\sqrt{n}$**.**

   b) $u_n \sim \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)}$ **où** u_n **désigne le nombre de chiffres dans l'ecriture de** n **en base 10, par exemple** $u_5 = 1, u_{198762} = 6$**.**
   indication : $u_n = r \Longleftrightarrow 10^{r-1} \leq n < 10^r$**.**

   c) $\dfrac{2^n + n^2 - 3}{2^n + 3^n - n^{2005}} \sim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$**.**

   d) $C_{2n}^n = o(a^n)$ **si** $a > 4$**.**

   e) $a^n = o(C_{2n}^n)$ **si** $0 < a < 4$**.**

3) **Soit** $u_n \in \mathbb{N}$ **definie par :** $u_0 = 2, u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1 + u_n^2}$

   a) **Exprimer** $\dfrac{1 + u_n}{1 - u_n}$ **puis** u_n **en fonction de n .**

   b) **En déduire un equivalent simple de** u_n.

Exercice 16 . **Théorème de Césaro.**

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^*_+)^{\mathbb{N}}, l \in \mathbb{R}$**, on pose :** $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \quad , w_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} u_i}$

1) **Montrer que** $\lim u_n = l \Longrightarrow \lim v_n = l$ ***(Théoréme de Césaro).***
2) **A l'aide d'une contre exemple montrer que la réciproque est fausse**
3) **Montrer en revanche que :** $\lim u_n = +\infty \Longleftrightarrow \lim v_n = +\infty$.
4) **Montrer que** $\lim u_n = l \Longrightarrow \lim w_n = l$

Exercice 17 .**Recherche d'equivalent simple par la méthode de Césaro.**

1) **Soit** $(u_n) \in (\mathbb{R}^*_+)^{\mathbb{N}}$ **à partir d'un certain rang telle que** $\lim u_n = 0$ **et que** $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ **tels que** $u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha \to \beta$**, avec** $\alpha < 0$.
   Montrer alors que : $\dfrac{u_n^\alpha - u_0^\alpha}{n} \to \beta$.
   Indication : On pourra utiliser le théorème de Césaro.
2) **En déduire que si** $\beta > 0$**, alors** $u_n \sim (n\beta)^{\frac{1}{\alpha}}$.
3) **Application.**
   En utilisant la relation $\lim\limits_{0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$**, donner un équivalent simple des suites suivantes définies par :**
   $u_0 = a \in]0,1[$ **et :**
   a) $u_n = \ln(1+u_{n-1})$.
      Indication : $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ ***pour*** $x > 0$.
   b) $u_n = \sin(u_{n-1})$.
      Indication : $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin(x) < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!}$ **pour** $x > 0)$

Exercice 18 . **Séries alternées.**

Soit (x_n) **une suite de réels positifs, décroissante, telle que** $\lim\limits_{n} +\infty x_n = 0$**. Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, on pose :** $u_n = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + (-1)^n x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k$ **. On pose enfin** $v_n = u_{2n}$ **et** $w_n = u_{2n+1}$ **.**

1) **Montrer que les suites** (v_n) **et** (w_n) **sont adjacentes.**
2) **En déduire la convergence de la suite** (u_n).
3) **Montrer, par récurrence, que, pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$ **et pour tout** $x > -1$**, on a :**

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt \,.$$

4) **Dans cette question, on pose** $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ **. Calculer** $\lim\limits_{n} +\infty u_n$.

Exercice 19 . **Décomposition en inverses.**
Soit $x \in \mathbb{Q}$, $0 < x < 1$. On définit une suite (x_n) de rationnels par récurrence :
- $x_0 = x$,
- x_n **existe et est non nul, soit $k_n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $\frac{1}{k_n} \leq x_n$. On pose** $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{k_n}$,
- **Si $x_n = 0$, on s'arrête. Dans ce cas,** $x = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}}$.

1) **Montrer que la suite est toujours finie.**
2) **Montrer que si k_{i+1} existe, alors $k_{i+1} > k_i(k_i - 1)$.**
3) **Réciproquement, soit une décomposition :** $x = \frac{1}{n_0} + \cdots + \frac{1}{n_p}$ **avec** $n_i \in \mathbb{N}^*$ **et** $n_{i+1} > n_i(n_i - 1)$. **Montrer que pour tout i, on a $n_i = k_i$.**

Exercice 20 . **Intégrales de Wallis et formule de Stirling.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt, J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt \quad \textit{\textbf{Intégrales de Wallis}}$$

et on se propose démontrer la formule suivante dite de *Stirling* :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

1) **Montrer que $I_n = J_n$.**
2) **Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.**
3) **Montrer que $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, en déduire que : $I_n \sim In + 1$.**
4) **Montrer que le produit le produit $(n + 1)I_nI_{n+1}$ est constant, en déduire que** $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
5) **Exprimer I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide des factorielles.**
6) **On pose pout tout $n \in \mathbb{N}^*$,** $\quad \alpha_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$.
   Montrer que : $\ln\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) \sim \frac{1}{12n^2}$.
   On pourra l'utiliser sans le démontrer le résultat suivant :
   $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Exercice 21 . **Intégrales de Wallis et formule de Stirling (Suite).**

1) **En déduire que** $\dfrac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) \leq \dfrac{2}{n^2}$ **à partir d'un certain rang.**

2) **Montrer que la suite** $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ **est croissante majorée, puis converge.**

Indication : On pourra utiliser la relation $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$.

3) **En déduire que** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\right)$ **est croissante majorée, puis convergente.**

Conclure que α_n **converge vers une limite strictement positive, on notera** α **sa limite sans chercher à la calculer.**

4) **Exprimer** $\dfrac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}}$ **en fonction de** n **et** I_{2n}**.**

5) **En déduire la valeur de** α **puis que :**

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad \textit{(formule de Stirling)}$$

6) **En déduire** $\lim \left(\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\right)$.

Fin
à la prochaine