Feuille d'exercices : *Suites numériques.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسوُلَهُ وَ المُؤ مِنِين
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Exercice 1. *On considère la suite (u_n) définie par :*
$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sqrt[n]{n!}$.

1) *Montrer que :* $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k)$.
2) *Soit $k \geq 2$. Démontrer l'encadrement :*
$$\int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln x \, dx \; .$$
3) *En déduire un encadrement de $\ln u_n$, puis que :* $\lim u_n = +\infty$.
4) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Étudier le signe de v_n. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).*

Exercice 2. *Soit $(u_n), (v_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ tel que $(u_n v_n)$ converge vers 1, montrer que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers 1 .*

Exercice 3. *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+$ fixes. Trouver les suites réelles vérifiant :*

1) $u_0 = a, \; u_1 = b, \; u_{n+2} = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.
2) $u_0 = a, \; u_1 = b, \; u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

Exercice 4. *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixe. Déterminer les limites des suites suivantes :*
$$u_n = \frac{E(nx)}{n}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{E(kx)}{n^2}, \quad w_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$
On pourra utiliser les résultats suivants :
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad \forall x > -1.$$

Exercice 5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ *et* $u_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$.

1) *Par récurrence, montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$.
2) *Par récurrence, montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$.
3) *La suite (S_n) est-elle convergente ?*
4) *Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.*

Exercice 6. *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que :*

1) $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ *convergent vers la même limite* $\Longrightarrow (u_n)$ *converge*
2) $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ *convergent* $\Longrightarrow (u_n)$ *converge.*

Exercice 7. *Soit (u_n) une suite monotone qui admet une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente, montrer que (u_n) est aussi convergente .*

Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente et L sa limite on suppose que $L \notin \mathbb{Z}$

1) *Montrer que $E(L) < x_n < E(L) + 1$ à partir d'un certain rang.*
2) *En déduire que $(E(x_n))$ est stationnaire puis .converge vers $E(L)$*

Exercice 8. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixe, on pose* $u_n(m) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{nm} \frac{1}{k}$

1) *Montrer que $u_n(m)$ est monotone puis qu'elle converge,*
   soit $L(m)$ sa limite.
2) *Monter que $L(pq) = L(p) + L(q)\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$*

Exercice 9. *On pose $u_n = cos(n), v_n = sin(n)$*

1) *Exprimer u_{n+1}, v_{n+1} en fonction de u_n, v_n*
2) *Montrer que si (u_n) converge alors (u_n) et (v_n) convergent vers 0*
3) *Conclure que (u_n) et (v_n) ne peuvent pas converger*

Exercice 10. *Calcul approché de π à l'aide de la méthode de Viete.*

1) *Soit $0 < \theta < \pi$ tel que* $\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   Montrer que les suites $2^n \sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ *et* $2^n \tan\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ *sont adjacentes.*

   Calculer leurs limites communes.
2) *Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} & , v_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} & , v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$$

   Montrer que : $\lim \left(v_n \sqrt{2 - u_n}\right) = \pi$.

   Indication : On pourra utiliser les relations : $\begin{cases} 1 + \cos\theta = 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \end{cases}$.

Exercice 11. *Suites adjacentes.*

1) *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b$, on pose :* $\begin{cases} u_0 = a, u_1 = b \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} \end{cases}$
   a) *Montrer que $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ sont adjacentes.*
   b) *Calculer $u_{n+1} - u_n$, en déduire $\lim u_n$.*
2) *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b$, on pose :*

$$\begin{cases} a_0 = a & , b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n} & , b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

   a) *Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes.*
   b) *Calculer leurs limites communes.*

Exercice 12. *Nombre de nombres ne comportant pas 13.*
Soit T_n le nombre d'entiers naturels de n chiffres exactement ne comportant pas la séquence 13 en numération décimale.

1) *Montrer que $T_{n+2} = 10T_{n+1} - T_n$.*

2) *Calculer T_n en fonction de n.*

3) *On note $x_n = (\sqrt{3}+1)^{2n+1}$, $y_n = (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$, et $z_n = [x_n]$.*
Montrer que $z_n = x_n - y_n$.

4) *En déduire que 2^{n+1} divise z_n.*

Exercice 13. *Moyenne arithmico-géométrique.*
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a > b$, on pose :

$$\begin{cases} a_0 = a & , b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & , b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

1) *Montrer que ces suites sont bien définies.*

2) *Montrer qu'elles sont adjacentes.*
On note par $M(a,b)$ leurs limite commune qu'on appelle moyenne arithmico - géométrique de a et b.

3) *Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$: $|a_n^2 - b_n^2| \leq 16b^2 \left(\dfrac{a^2-b^2}{16b^2}\right)^{2^n}$.*

4) *Donner une majoration de $|a_n - M(a,b)|$ et $|M(a,b) - b_n|$ en fonction de a, b, n*

5) *En déduire une valeur approchée par défaut et une par excès de $M(2,1)$ à 10^{-4} prés.*

Exercice 14. *Calcul approche de π à l'aide de la méthode des isopêrimétres.*

1) *Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a < b$, on pose :*

$$\begin{cases} a_0 = a & , b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & , b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes.

2) *Exprimer leurs limites communes en fonction de $\theta = \arccos\left(\dfrac{a}{b}\right)$.*
Indication : On pourra d'abord commencer par exprimer les a_n, b_n en fonction de θ.

3) *soit $n \in \mathbb{N}$, et P_n le polygône régulier à 2^n côtés et de périmètre 2, soit r_n le rayon du cercle inscrit et R_n celui du cercle circonscrit à P_n, montrer que $\forall n \geq 2$ on a :*

$$r_{n+1} = \frac{r_n + R_n}{2}, R_{n+1} = \sqrt{r_{n+1} R_n}$$

4) *En déduire qu'elle sont adjacentes puis en remarquant que : $\dfrac{1}{R_n} \leq \pi \leq \dfrac{1}{r_n}$ en déduire que $\dfrac{1}{R_n}, \dfrac{1}{r_n}$ convergent vers π.*

Exercice 15. ***Comparaisons de suites numériques.***

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ *on pose* $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

a) *Montrer que* $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ *en déduire la limite de* I_n.

b) *A l'aide d'une intégration par parties établir que :*

$$(n+1)I_n = e^{-1} + I_{n+1}$$

c) *En déduire un équivalent simple de* I_n.

2) *Montrer les résultats suivants :*

a) $E(n\sqrt{n+1}) + E(n\sqrt{n}) \sim 2n\sqrt{n}$.

b) $u_n \sim \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)}$ *où* u_n *désigne le nombre de chiffres dans l'ecriture de* n *en base 10, par exemple* $u_5 = 1, u_{198762} = 6$.
indication : $u_n = r \iff 10^{r-1} \leq n < 10^r$.

c) $\dfrac{2^n + n^2 - 3}{2^n + 3^n - n^{2005}} \sim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

d) $C_{2n}^n = o(a^n)$ *si* $a > 4$.

e) $a^n = o(C_{2n}^n)$ *si* $0 < a < 4$.

3) *Soit* $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *definie par :* $u_0 = 2, u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n^2}$

a) *Exprimer* $\dfrac{1+u_n}{1-u_n}$ *puis* u_n *en fonction de* n .

b) *En déduire un equivalent simple de* u_n.

Exercice 16. ***Théorème de Césaro.***

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}, l \in \mathbb{R}$, *on pose :* $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \quad , w_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} u_i}$

1) *Montrer que* $\lim u_n = l \Longrightarrow \lim v_n = l$ *(Théoréme de Césaro).*

2) *A l'aide d'une contre exemple montrer que la réciproque est fausse*

3) *Montrer en revanche que :* $\lim u_n = +\infty \iff \lim v_n = +\infty$.

4) *Montrer que* $\lim u_n = l \Longrightarrow \lim w_n = l$

Exercice 17. ***Recherche d'equivalent simple par la méthode de Césaro.***

1) *Soit* $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ *à partir d'un certain rang telle que* $\lim u_n = 0$ *et que* $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha \to \beta$, *avec* $\alpha < 0$.
Montrer alors que : $\dfrac{u_n^\alpha - u_0^\alpha}{n} \to \beta$.
Indication : On pourra utiliser le théorème de Césaro.

2) *En déduire que si* $\beta > 0$, *alors* $u_n \sim (n\beta)^{\frac{1}{\alpha}}$.

3) ***Application.***

En utilisant la relation $\lim\limits_{n \to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, *donner un équivalent simple des suites suivantes définies par :*
$u_0 = a \in]0, 1[$ *et :*

a) $u_n = \ln(1 + u_{n-1})$.

Indication : $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ *pour* $x > 0$.

b) $u_n = \sin(u_{n-1})$.

Indication : $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin(x) < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!}$ *pour* $x > 0)$

Exercice 18. *Séries alternées.*

Soit (x_n) une suite de réels positifs, décroissante, telle que $\lim_{n\to n} +\infty x_n = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + (-1)^n x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k$. On pose enfin $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1) *Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.*

2) *En déduire la convergence de la suite (u_n).*

3) *Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > -1$, on a :*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt \, .$$

4) *Dans cette question, on pose $x_n = \dfrac{1}{n+1}$. Calculer $\lim_{n\to n} +\infty u_n$.*

Exercice 19. *Décomposition en inverses.*

Soit $x \in \mathbb{Q}$, $0 < x < 1$. On définit une suite (x_n) de rationnels par récurrence :

- $x_0 = x$,
- *x_n existe et est non nul, soit $k_n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $\dfrac{1}{k_n} \leq x_n$. On pose $x_{n+1} = x_n - \dfrac{1}{k_n}$,*
- *Si $x_n = 0$, on s'arrête. Dans ce cas, $x = \dfrac{1}{k_0} + \dfrac{1}{k_1} + \cdots + \dfrac{1}{k_{n-1}}$.*

1) *Montrer que la suite est toujours finie.*

2) *Montrer que si k_{i+1} existe, alors $k_{i+1} > k_i(k_i - 1)$.*

3) *Réciproquement, soit une décomposition : $x = \dfrac{1}{n_0} + \cdots + \dfrac{1}{n_p}$ avec $n_i \in \mathbb{N}^*$ et $n_{i+1} > n_i(n_i - 1)$. Montrer que pour tout i, on a $n_i = k_i$.*

Exercice 20. *Intégrales de Wallis et formule de Stirling.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt, \; J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt \;\; \textit{Intégrales de Wallis}$$

et on se propose démontrer la formule suivante dite de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

1) *Montrer que $I_n = J_n$.*

2) *Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.*

3) *Montrer que $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, en déduire que : $I_n \sim In + 1$.*

4) *Montrer que le produit le produit $(n+1)I_n I_{n+1}$ est constant, en déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.*

5) *Exprimer I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide des factorielles.*

6) *On pose pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$.*

Montrer que : $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) \sim \dfrac{1}{12n^2}$.

On pourra l'utiliser sans le démontrer le résultat suivant :

$\ln(1 + \dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.

Exercice 21. *Intégrales de Wallis et formule de Stirling (Suite).*

1) *En déduire que* $\dfrac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) \leq \dfrac{2}{n^2}$ *à partir d'un certain rang.*

2) *Montrer que la suite* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ *est croissante majorée, puis converge.*

Indication : On pourra utiliser la relation $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$.

3) *En déduire que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\right)$ *est croissante majorée, puis convergente.*

Conclure que α_n *converge vers une limite strictement positive, on notera* α *sa limite sans chercher à la calculer.*

4) *Exprimer* $\dfrac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}}$ *en fonction de* n *et* I_{2n}.

5) *En déduire la valeur de* α *puis que :*

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad \text{(formule de Stirling)}$$

6) *En déduire* $\lim \left(\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\right)$.

Fin.