Feuille d'exercices : *Groupe symétrique*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Exercice 1. *On définit sur $\mathcal{S}_n$ la relation suivante :*

$$\beta\mathcal{R}\alpha \Longleftrightarrow \begin{cases} i) & supp(\beta) \subset supp(\alpha) \\ ii) & \exists \gamma \in \mathcal{S}_n \text{ tel que } supp(\gamma) \cap supp(\beta) = \emptyset \text{ et } \alpha = \beta \circ \gamma \end{cases}$$

On dit qu'une permutation α est irréductible quan elle vérifie la propriété suivante : $\forall \beta \in \mathcal{S}_n, \quad \beta\mathcal{R}\alpha \Longrightarrow \beta = \alpha$ *ou* $\beta = id_{[|1,n|]}$.

1) *Donner* $supp(id_{[|1,n|]})$.

2) *Soit* $\alpha \in \mathcal{S}_n$, *montrer que :* $supp(\alpha) = \emptyset \Longleftrightarrow \alpha = id_{[|1,n|]}$.
En déduire que : $id_{[|1,n|]}$ *est irréductible.*

3) *Donner un exemple d'une permutation irréductible autre que* $id_{[|1,n|]}$.

4) *Soit* $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{S}_n$.
Montrer que $supp(\gamma_1 \circ \gamma_2) \subset supp(\gamma_1) \cup supp(\gamma_2)$.

5) *Soit* $(\beta, \gamma) \in \mathcal{S}_n^2$ *tel que* $supp(\beta) \cap supp(\gamma) = \emptyset$.
Montrer que : $\forall i \in [|1,n|], \quad i \in supp(\beta) \Longleftrightarrow \gamma(i) \in supp(\beta)$.

6) *Soit* $(\beta, \alpha) \in \mathcal{S}_n^2$ *tels que :* $\beta\mathcal{R}\alpha$.
Montrer que : $supp(\alpha) = supp(\beta) \cup supp(\gamma)$ *, où γ est la permutation citée dans la définition.*

7) *En déduire que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$*

8) *Soit* $\alpha \in \mathcal{S}_n$, *montrer que α est irréductible $\Longleftrightarrow$ α est un cycle.*

9) *Montrer que :* $\forall \alpha \in \mathcal{S}_n \quad \exists p \in \mathbb{N}^*, \exists \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ *permutations de* $[|1,n|]$ *irréductibles, à supports deux à deux disjoints telles que :* $f = \beta_1 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \beta_p$.

10) *A quel notions connues sur $\mathbb{N}$ ressemblent la relation $\mathcal{R}$ et les permutations irréductibles.*

Exercice 2. *Soit* $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

1) *Montrer que card* $supp(\sigma) \neq 1$.

2) *Montrer que card* $supp(\sigma) = 2 \Longrightarrow \sigma$ *est une transposition.*

3) *Montrer que card* $supp(\sigma) = 3 \Longrightarrow \sigma$ *est une 3-cycle.*

4) *Donner un exemple où card* $supp(\sigma) = 4$, *mais σ n'est pas un 4-cycle.*

Exercice 3. *Soit* $(n,p) \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $p \leq n$ *et* $\sigma = (i_1, \ldots, i_p)$ *un p-cycle.*

1) *Montrer que :* $\forall \alpha \in \mathcal{S}_n, \quad \alpha\sigma\alpha^{-1} = (\alpha(i_1), \ldots, \alpha(i_p))$.

2) *En déduire : (1 3 2)(1 2 3 4)(1 2 3).*

3) *Montrer que* $o(\sigma) = p$.

4) *Montrer que :* $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad o(\sigma^k) = \dfrac{p}{p \wedge k}$.

5) *En déduire que σ^k est un p-cycle* $\Longleftrightarrow k \wedge p = 1$.

6) *Calculer* $(1\ 2\ 3\ 4)^k$, *pour* $k = 2, k = 3$.

7) *Soit* $A_1, \ldots, A_n$ *les sommets d'un polygône régulier, à quelle condition sur* $0 \leq k \leq n-1$, *on peut parcourit tout le polygône en sautant chaque fois k sommets et revenir au sommet de départ.*

Fin.