MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللّهُ عَمَلَكُم وَ رَسوُلُهُ وَ المُؤ مِنُون
صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

Exercice 1. Soient a, b sont deux nombres réels. Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = a \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = b \end{cases}$.

2) $\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(y) = a \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(y) = b \end{cases}$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes :

1) $2\arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.
2) $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \arctan(x)$.
3) $2\arctan(2) - \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \arctan(x)$.
4) $\arccos(\sin(x)) + \arcsin(\cos(x)) = 1$.
5) $\arcsin(1) = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin(x)$.
6) $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.
7) $\arcsin(x) + \arcsin(2x) = \arccos(x) + \arccos(2x)$

Exercice 3. Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\arcsin(\sin(x)) + \arccos(\cos(y)) = x + y$$

On pourra commencer par traiter le cas $x, y \in [0, 2\pi]$.

Exercice 4. Etudier les variations des fonctions definies par :

1) $f : x \to \arccos\left(\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$.
2) $f : x \to \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}\right)$.

Exercice 5. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + p\pi$$

où p est un entier à déterminer en discutant sur les signes .

Exercice 6. On considère la fonction : $f(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$.

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.
2) La courbe coupe l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses en un point A, calculer l'abscisse de A.

Exercice 7. Simplifier les expressions suivantes : $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}}\right)$, $\dfrac{1+\operatorname{th}^2(x)}{1-\operatorname{th}^2(x)}$.

Exercice 8. Soit la fonction $y=\sin(n\arcsin x)$.
Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}:\quad (1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$

Exercice 9. Soit $x\in]0,1]$. On pose $y=\arccos(x)$.

1) Exprimer en fonction de $x, \cos(y), \sin(y)$ et $\tan(y)$.
2) En déduire que $\arccos(x)=\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.
3) Si $x=0$, quelle est la valeur de $\arccos(x)$?.

Exercice 10. On considère la fonction :
$f(x)=\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)-2\arctan(x)$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f. Calculer f' .
2) En déduire une expression simple de f sur des intervalles à choisir.
3) Dessiner la représentation graphique de f.

Exercice 11. .

1) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2:\cos(a)\cos(b)\neq 0$.
   Montrer que : $\tan(a)+\tan(b)=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$.
2) Résoudre les équations suivantes :
   a) $\tan(x)=\tan(2x)$.
   b) $\tan(x)=-\tan(2x)$.
   c) $\tan(2x)=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Exercice 12. Montrer que :

1) $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \arctan x+2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\dfrac{\pi}{2}$.
2) $\forall\, x\in\,]0,1],\ 2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}+\arcsin(2x-1)=\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 13. Polynômes de Chebychev.
Pour $n\in\mathbb{N}$, et $x\in[-1,1]$, on pose $f_n(x)=\cos(n\arccos x)$

$$g_n(x)=\frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.

Exercice 14. Olympiades.

1) On sait que $\forall x\in\mathbb{R}:\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, résoudre l'équation : $\cos^n(x)+\sin^n(x)=1$ pour $n\geq 3$.
2) On sait que $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$, pour tout réel x.
   Pour quelles valeur de x, a-t-on :
   a) $\cos(3x)=\cos^3(x)-\sin^3(x)$.
   b) $\cos(4x)=\cos^4(x)-\sin^4(x)$.
3) Trouver les réels x tel que $a=\tan\left(\dfrac{\pi}{12}-x\right), b=\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $c=\tan\left(\dfrac{\pi}{12}+x\right)$ forment une progression géométrique dans cet ordre.
   Indication : On pourra remarquer que $ac=b^2$.
4) Résoudre le système :

$$\begin{cases}\tan(x_1)+3\operatorname{cotan}(x_2) &= 2\tan(x_2)\\ \tan(x_2)+3\operatorname{cotan}(x_3) &= 2\tan(x_1)\\ \vdots & \vdots\\ \tan(x_n)+3\operatorname{cotan}(x_n) &= 2\tan(x_1)\end{cases}$$

Fin.