MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Controle N°6

Samedi le:1-Mars-2003

Programme : Fonctions Integrables & Equations différentielles
Durée : 2 heures

Probléme 1 (4 *points et* 1*heure*)

α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1,

1. (0.75)Montrer que $f : t \to e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}, g : t \to e^{-\alpha t}t^n$ sont integrables sur $]0,+\infty[$et on pose : $I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt \quad ,\forall n \in IN \quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}t^n dt$Calculer I_0.
2. (0.5)Pour $n \geq 1$à l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.
3. (0.25)En déduire la valeur de I_n en fonction de n et α.
4. (0.5)En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus sur l'intervalle $[0,x]$, montrer que : $\forall x \in IR_+ \quad \forall n \in IN \qquad \left|\sin(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$.
5. (0.5)En déduire que : $\left|I - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{I_{2k}}{(2k+1)!}\right| \leq KI_{2n+1}, K$ étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n.
6. (0.25)En déduire : $I = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right)$.
7. (0.5)On pose, pour tout réel x : $\arctan(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2}$. Montrer que : $\forall n \in IN^* \quad \forall t \in [0,1] \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$
8. (0.25)En déduire que : $\forall n \in IN^* \quad \forall x \in [0,1] \quad \left|\arctan(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leq \frac{1}{2n+3}$
9. (0.5)En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction arctan.

Probléme 2 (3*pts et* 30*mn*)

Soit n entier nature non nul etudier l'integrabilite sur $]0,1]$ de la fonction $f : x \to x^n ln(x)$ puis calculer $\int_{]0,1]} f, \int_{]0,\frac{1}{2}]} f$

1. (0.25)etudier l'integrabilite sur $]0,1[$ de la fonction $x \to \frac{\ln(x)}{1-x}$
2. (0.75)montrer que :$\forall n \in IN^*, \left|\int_{]0,1[} \frac{\ln(x)}{1-x} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right| \leq \frac{1}{n+1}$, ,En déduire la valeur de $\int_{]0,1[} \frac{\ln(x)}{1-x}$,(Indication :$\lim\limits_{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, (1-x^n) = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$)
3. (0.75)avec un raisonnement pareil que le precedent montrer que: $\int_{]0,\frac{1}{2}[} \frac{\ln(x)}{1-x} = -(\ln 2)^2 - \lim\limits_{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^k}$
4. (0.25)etudier l'integrabilite sur $[0,1[$ des fonctions : $g : x \to \frac{\ln(x+1)-\ln 2}{x^2-1}, h : x \to \frac{\ln(x+1)-x\ln 2}{x^2-1}$ on pose : $I = \int_{[0,1[} \frac{\ln(x+1)-\ln 2}{x^2-1}, J = \int_{[0,1[} \frac{\ln(x+1)-x\ln 2}{x^2-1}$
5. (0.75)montrer que : $I = \frac{1}{2}\int_{[\frac{1}{2},1[} \frac{\ln(x)}{1-x} + \frac{1}{4}(\ln 2)^2$
6. (0.25) en deduire les valeurs de I, J.

Exercice (3 *points et* 30*mn*)

1. $xy' + 2y = \frac{2x}{1+x^2}$.(1pt)
2. $y'' - 2y' + 2y = (2x-1)\sin(x)$ (2pt)