MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Controle N°6

Samedi le:1-Mars-2003

Corrigé

Probléme 1

1. $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}e^{-\alpha t}=1, \forall t\in]1,+\infty[$ $\quad |\frac{\sin t}{t}e^{-\alpha t}|\leq e^{-\alpha t}, I_0=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}dt=[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}]_0^{+\infty}=\frac{1}{\alpha}$
2. $I_n=\frac{n}{\alpha}I_{n-1}$,
3. $I_n=\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$
4. Cours
5. En multipliant les deux membres de l' inégalité précédente par $\frac{e^{-\alpha t}}{t}$, qui est positif, on obtient le résultat avec $K=\frac{1}{(2n+2)!}$.
6. $\frac{1}{(2n+2)!}I_{2n+1}=\frac{1}{(2n+2)\alpha^{2n+2}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ car $\alpha\geq 1$ donc :$I=\lim_{n\to+\infty}\left(I_0-\frac{I_2}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{I_{2n}}{(2n+1)!}\right)$Mais : $\forall k\in IN \quad I_k=\frac{k!}{\alpha^{k+1}}$,
7. Récurrence
8. $\forall x\in[0,1]:\left|\sum_{k=0}^{n}\int_0^x(-1)^k t^{2k}dt-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt\right|=\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\leq\int_0^x t^{2n+2}dt=\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\leq\frac{1}{2n+3}$
9. $\forall x\in[0,1]:\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=\arctan(x)$En particulier, pour $x=\frac{1}{\alpha}$, l'expression de I trouvée dans la question 3.c devient : $I=\arctan(\frac{1}{\alpha})$

Probléme 2 & **Exercice** Vus en TD