**CPGE My Youssef, Rabat**

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

# DL 19 (08-09): *Intégration sur un intervalle quelconque*

**1er mai 2009**

***Blague du jour :***
**• Qu'est ce que crie un escargot sur le dos d'une tortue ?**
**Réponse : Yaaaaaaaaaaahooooooooooooooooooooooooouuuuuuuuuuuuuu ! ! ! !**
**• Que dit un hérisson qui se cogne à un cactus ?**
**Réponse : maman !**
**• Quel est l'animal le plus heureux ?**
**Réponse : Le hiboux. Parce que sa femme s'appelle chouette.**

***Mathématicien du jour*** — ***Padè***

**Henri Eugène Padé (1863-1953), était un mathématicien français, qui est surtout connu pour son développement des méthodes d'approximation des fonctions par des fonctions rationnelles. Agrégé de l'École Normale Supérieure, il enseigna en classes prépas au Lycée Faidherbe de Lille. Il poursuit ses travaux de rehcerhce en Allemagne sous la direction de Félix Klein et Schwarz, puis en France avec Charles Hermite.**

**PROBLÉME :** — **Source : DL-MPSI, David Delaunay, Lorient-France.**

## Etude d'une fonction définie par une intégrale

*Préliminaire :*

Soit $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ une fonction décroissante.

On définit une fonction $\varphi:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ par : $\forall x>0, \varphi(x)=xf(x)$.

On suppose qu'il existe $T\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall x>0, \varphi(x+T)=\varphi(x)$.

a. Soit $x,y\in\mathbb{R}^{+*}$ tels que $x\le y$.

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{\varphi(y)}{y+nT}\le\dfrac{\varphi(x)}{x+nT}$

puis que $\varphi(y)\le\varphi(x)$.

b. Conclure que $\varphi$ est une fonction constante.

.

*Problème :*

On note $I$ l'intervalle $]-1/2,+\infty[$.

Pour $x \in I$ on pose $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{x+1}}$.

1.a Montrer que la fonction $F$ est bien définie et qu'elle est à valeurs strictement positives.

1.b Calculer $F(0)$.

1.c Calculer $F(1/2)$ en s'appuyant sur le changement de variable $t=\tan u$.

2. Pour $t \in \mathbb{R}^+$ fixé, on note $g_t : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g_t(x)=\frac{1}{(1+t^2)^{x+1}}$.

2.a Etudier la monotonie de $g_t$ et en déduire que $F$ est décroissante.

2.b Etudier la convexité de $g_t$ et en déduire que $F$ est convexe.

3. Dans cette question on désire établir la continuité de la fonction $f$.
On se donne $a \in I$.

3.a Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^{a+1}}dt$ est bien définie.

3.b Etablir que pour tout $x,y \geq a$ et tout $t \in [0,+\infty[$,
on a $\left|\frac{1}{(1+t^2)^{y+1}}-\frac{1}{(1+t^2)^{x+1}}\right| \leq |y-x|\frac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^{a+1}}$.

3.c En déduire que $F$ est lipschitzienne sur $[a,+\infty[$ puis que $F$ est continue sur $I$.

4.a Soit $x \in I$.
Etablir la relation $F(x+1)=\frac{2x+1}{2x+2}F(x)$.

4.b Calculer $F(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Soit $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x>0, \varphi(x)=xF(x)F(x-\frac{1}{2})$.

5.a Montrer que pour tout $x>0$, $\varphi(x+\frac{1}{2})=\varphi(x)$.

5.b En déduire que $\varphi$ est une fonction constante et donner la valeur de cette constante.

5.c Déterminer un équivalent simple de $F$ en $-\frac{1}{2}$.

5.d Déterminer un équivalent simple de $F$ en $+\infty$.

*Fin*
*à la prochaine*