Corrigé DL 19

Intégration sur un intervalle quelconque

Préliminaire

a) $x \leq y \Rightarrow x+nT \leq y+nT \Rightarrow f(y+nT) \leq f(x+nT)$ car $f \downarrow$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(y+nT)}{y+nT} \leq \frac{\varphi(x+nT)}{x+nT}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(y)}{y+nT} \leq \frac{\varphi(x)}{x+nT} \quad \text{car } \varphi \ T\text{-périodique}$$

donc $\varphi(y) \leq \dfrac{y+nT}{x+nT}\varphi(x)$ puis $n \to +\infty$ d'où $\varphi(y) \leq \varphi(x)$

b) Soit $x \neq y$ $\exists n \in \mathbb{Z}$ tq $y+nT \leq x \leq y+(n+1)T$

(prendre $n = E\left(\dfrac{x-y}{T}\right)$)

d'où $\underset{\varphi(y)}{\underset{\parallel}{\varphi(y+(n+1)T)}} \leq \varphi(x) \leq \varphi(y+nT) = \varphi(y)$

Problème :

1.a) au vois de $+\infty$ $\dfrac{1}{(1+t^2)^{x+1}} \sim \dfrac{1}{t^{2x+2}}$ intég au vois de $+\infty$ car $2x+2>1$

donc $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{x+1}}$ cvge donc $f(x)$ est bien défini

d'autre part la fct $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^{x+1}}$ est continue positive non nulle

donc d'intégrale strict positive

1.b) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = \left[\arctan t\right]_0^{+\infty} = \pi/2$

1.c) $F(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} dt$

$t = \tan u$

$dt = (1+\tan^2 u)du$

$\frac{dt}{1+t^2} = du$

$= \int_0^{\pi/2} \cos u \, du = \left[+\sin u\right]_0^{\pi/2} = 1$

$\sqrt{1+t^2} = \sqrt{1+\tan^2 u} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}}$

$= \frac{1}{\cos u}$

2) a) $x \leq y \Rightarrow (1+t^2)^{x+1} \leq (1+t^2)^{y+1} \Rightarrow \frac{1}{(1+t^2)^{x+1}} = g_t(x) \leq \frac{1}{(1+t^2)^{y+1}} = g_t(y)$

$t > 0$

donc $\int_0^{+\infty} g_t(x) dt = F(x) \leq \int_0^{+\infty} g_t(y) dt = F(y)$

d'où F est décroissante

b) $g_t(x) = e^{(x+1)\ln(1+t^2)}$ donc $g_t''(x) = (\ln(1+t^2))^2 e^{(x+1)\ln(1+t^2)} \geq 0$

donc g_t convexe

donc $g_t(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda g_t(x) + (1-\lambda) g_t(y)$

d'où $\int_0^{+\infty} g_t(\lambda x + (1-\lambda) y) dt \leq \lambda \int_0^{+} g_t(x) + (1-\lambda) \int_0^{+\infty} g_t(y) dt$

càd $F(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda) F(y)$

donc F convexe

DL 19

3.a) au vois de $+\infty$ $\dfrac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^{a+1}} \sim \dfrac{\ln(1+t^2)}{t^{2a+2}}$

$a > -\frac{1}{2}$ donc $2a+2 > 1$ et $\exists\ 1 < \beta < 2a+2$

d'où $\dfrac{t^{\beta}\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^{a+1}} \sim \dfrac{\ln(1+t^2)}{t^{2a+2-\beta}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

donc $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^{2a+1}}$ integ sur $[0,+\infty[$

3.b) $\left|\dfrac{1}{(1+t^2)^{y+1}} - \dfrac{1}{(1+t^2)^{x+1}}\right| = |g_t(x) - g_t(y)|$

$= |g_t'(c)|\,|x-y|$ où c entre x et y donc $c \geq a$

$= |y-x| \dfrac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^{c+1}} \leq |y-x| \dfrac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^{a+1}}$

3.c) En intégrant l'inégalité précédente sur $[0,+\infty[$ on obtient $|F(y)-F(x)| \leq k|y-x|$ où $k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^{a+1}}\,dt$

donc F k lipsch par suite continue car $\lim\limits_{y\to x} F(y) = F(x)$

4.a) $F(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{x+2}} = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{x+2}}\,dt = F(x) - \int_0^{+\infty} t\, \underbrace{\frac{t}{(1+t^2)^{x+2}}}_{v'}\,dt$ $\quad v = \dfrac{-1}{2(x+1)(1+t^2)^{x+1}}$

$= F(x) - \left(\left[\dfrac{t}{2(x+1)(1+t^2)^{x+1}}\right]_{t\to 0}^{t\to+\infty} + \dfrac{1}{2x+2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{x+1}}\right)$

$= F(x) - \dfrac{1}{2x+2}F(x) = \dfrac{2x+1}{2x+2}F(x)$

d'où $\boxed{F(x+1) = \dfrac{2x+1}{2x+2}F(x)}$

DL 19

3

4. b) $F(n) = \frac{2n-1}{2n} F(n-1)$

$F(n-1) = \frac{2n-3}{2n-2} F(n-2)$

$\vdots$

$F(1) = \frac{1}{2} F(0)$ $\quad F(0) = \pi/2$

$\Rightarrow F(n) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2} \pi/2$

$$\boxed{F(n) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \pi/2}$$

5. a) $\varphi(x+\frac{1}{2}) = (x+\frac{1}{2}) F(x+\frac{1}{2}) F(x)$

$\varphi(x) = x F(x) F(x-1/2)$

$x+\frac{1}{2} = x - 1/2 + 1$

$$\frac{\varphi(x+1/2)}{\varphi(x)} = \frac{x+1/2}{x} \frac{F(x+1/2)}{F(x-1/2)}$$

$$= \frac{x+1/2}{x} \frac{2x}{2x+1} = 1$$

5. b) $\varphi(x) = x f(x)$ où $f(x) = F(x) F(x-1/2)$ est croissante car F decroissante positive

donc φ est croissante et periodique donc cte

d'après le preliminaire

$\varphi(x) = \varphi(1/2) = \frac{1}{2} F(1/2) F(0) = \frac{1}{2} \cdot \pi/2 \cdot 1 = \frac{\pi}{4}$

5. c) $F(x-1/2) = \frac{\pi}{4x F(x)}$ posons $u = x - 1/2 \rightarrow -1/2$ qd $x \to 0$

$F(x-1/2) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{4x F(0)} = \frac{\pi}{2x}$

donc $F(u) \underset{u\to -1/2}{\sim} \frac{\pi}{2(u+1/2)} = \frac{\pi}{2u+1}$

5. d) F est decroissante positive donc minorée par 0

d'où $\lim_{+\infty} F(x) = l$ (finie) l-

$\lim_{x\to+\infty} F(x-1/2) = l$

donc $F(x) \sim F(x-1/2)$

DL 19

④ d'où $\frac{\pi}{4} = x F(x) F(x-1/2) \sim x F(x)^2$

donc $F(x) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$

FIN