MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Mercredi 02 mai 2007.

Durée: 4 heures.

PROBLÉME I. *Fonctions intégrables.*

Fonction Γ et β d'Euler.

Source : DS MPSI, 2000-2001, CPGE My Youssef-Rabat.

Partie I : Fonction Γ d'Euler.

1) Pour quelles valeurs du paramètre réel, α, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2) En déduire le domaine de définition de la fonction gamma d'Euler, notée Γ, définie par la relation :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

3) Montrer que Γ est strictement positive sur son domaine de définition.

4) Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la fonction $f_n : t \mapsto (\ln t)^n\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que pour tous réels h et t tels que $t > 0$ et $|h| \leq \dfrac{x}{2}$, on a :

$$|t^h - 1 - h\ln t| \leq \frac{h^2}{2}(\ln t)^2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}|\ln t|}$$

c) En déduire que Γ est indéfiniment dérivable en x, avec

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

d) En déduire que Γ est convexe sur $]0,+\infty[$.

5) a) Á l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$(\Gamma')^2 \leq \Gamma\Gamma\text{“} \quad \text{sur }]0,+\infty[$$

b) En déduire que $\ln\Gamma$ est convexe sur $]0,+\infty[$, on dit alors que Γ est logarithmiquement convexe.

6) a) Montrer que pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Gamma(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)\Gamma(x)$$

b) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\Gamma(x) = +\infty$.

8) a) En utilisant la convexité de Γ, montrer que Γ' s'annule sur $]0,+\infty[$ en un seul point, qu'on notera x_0.

b) En déduire les variations de Γ sur $]0,+\infty[$.

c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.
Indication : Utiliser le théorème de la limite monotone.

d) Montrer que $\Gamma'(1) < 0$.

e) En déduire que $x_0 \in]1,2[$.

Partie II : Fonction β d'Euler.

1) Pour quelles valeurs de α et β, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur $]0,1[$.
Dans la suite du problème, on pose, quand c'est bien définie :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$$

2) Montrer que pour tout $\alpha > 0, \beta > 0$, on a :

a) $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$.

b) $B(\alpha,\beta+1) = B(\alpha,\beta) - B(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta)$.

c) $B(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$.

3) Pour tout réel, x, et tout $\alpha > 0$, on pose : $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha-1}$.
Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$.

4) On fixe $\alpha, \beta > 0$, et on pose pour tout $y > 0$:

$$K(y) = \int_0^y f_\alpha(x) f_\beta(y-x)\,\mathrm{d}x$$

a) Justifier l'existence de $K(y)$ et montrer que :

$$K(y) = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mathrm{e}^{-y}y^{\alpha+\beta-1}$$

b) En admettant que

$$\int_0^{+\infty} K(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} f_\alpha(x)f_\beta(y-x)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

montrer que l'on a :

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

5) Calculer $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, puis en déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$, etcelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, intégrale dite de Gauss.

6) Soit $\alpha > 0$, étudier l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}$.
En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$, en déduire la valeur de $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$, pour tout $x \in]0,1[$.

Partie III : Application.

1) Pour quels couples $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, l'intégrale $I(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

2) Á l'aide d'un changement de variable, à justifier, montrer que :

$$I(\alpha,\beta) = B(\alpha+1,\beta-\alpha-1)$$

3) De manière similaire, exprimer $\displaystyle\int_a^b (t-a)^\alpha(b-t)^\beta\,\mathrm{d}t$, en fonction de $B(\alpha+1,\beta+1)$, pour tout $a < b$.

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^2 (t-a)^{\frac{1}{2}}(b-t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t$

http://www.chez.com/myismail
myismail1@menara.ma