DS 7(COMMUN) : *Fonctions intégrables* *Calcul matriciel*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

CORRIGÉ PROBLÉME II.

1) a) D'aprés la forme de la matrice, on peut conclure que $f(e_i) = e_{i+1}$, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

b) Par récurrence trés simple sur $j \in [\![1; n]\!]$, on peut montrer que $f^j(e_1) = e_{j+1}$.
D'aprés la forme de la matrice, on peut conclure que
$f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \cdots + a_{n-1}e_n)$.

2) a)
$$\begin{aligned} g(e_1) &= f^n(e_1) + a_{n-1}f^{n-1}(e_1) + \cdots + a_1 f(e_1) + a_0e_1 \\ &= f^n(e_1) + a_{n-1}e_n + \cdots + a_1e_2 + a_0e_1 \quad \text{(d'aprés 1.a)} \\ &= 0 \quad \text{(d'aprés 1.b)} \end{aligned}$$

b) $\forall\, i \in \mathbb{N}$, on a : $g \circ f^i = f^{n+i} + a_{n-1}f^{n-1+i} + \cdots + a_1 f^{1+i} + a_0 f^i = f^i \circ g$.

c) $\forall\, i \in [\![1; n]\!]$, on a :
$$\begin{aligned} g(e_i) &= g \circ f^{i-1}(e_1) && \text{d'aprés 1.b} \\ &= f^{i-1} \circ g(e_1) && \text{d'aprés 2.b} \\ &= 0 && \text{d'aprés 2.c} \end{aligned}$$

d) $P(f) = g$ est nul sur la base de $\mathcal{B}_0$, donc partout nul, d'où $P(f) = 0$, donc P est un polynôme annulateur de f.
Application 1 : Il faut choisir par exemple $A = \mathcal{M}_f(\mathcal{B}_0)$ de sorte que $f^5 - f^3 - 2f^2 - \text{ id} = 0$, donc telle que $P(X) = X^5 - X^3 - 2X^2 - 1$ soit polynôme annulateurt de f, d'aprés ce qui précède il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) Soit λ valeur propre de f, et $x \neq 0$ vecteur propre associé, donc $f(x) = \lambda x$, par récurrence simple sur $k \in \mathbb{N}$, on montre que $f^k(x) = \lambda^k x$. Or $P(f) = 0$, donc $0 = P(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k\right) x = P(\lambda)x$, ainsi $P(\lambda)x = 0$ et comme $x \neq 0$, alors $P(\lambda) = 0$.

3) a)
$$\begin{aligned} Q(f)(e_1) &= \alpha_0e_1 + \alpha_1 f(e_1) + \cdots + \alpha_{n-1}f^{n-1}(e_1) \\ &= \alpha_0e_1 + \alpha_1e_2 + \cdots + \alpha_{n-1}e_n \quad \text{d'aprés 1.b} \end{aligned}$$

b) Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \setminus \{0\}$ tel que $Q(f) = 0$, en particulier $Q(f)(e_1) = 0$, donc $\alpha_0e_1 + \alpha_1e_2 + \cdots + \alpha_{n-1}e_n = 0$, or $\mathcal{B}_0 = (e_1, \cdots, e_n)$ base de E, donc $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$, d'où $Q = 0$, contradiction.

c) $0 = P(f) = (f - \lambda \text{ id}) \circ R(f) = 0$, car $P = (X - \lambda)R$.

d) $\deg P = n \implies \deg R = n - 1 \implies R(f) \neq 0$, d'aprés 3.b, donc $\exists x_0 \in E$ tel que $R(f)(x_0) \neq 0$, posons $x = R(f)(x_0)$, donc $0 = (f - \lambda \text{ id}) \circ R(f)(x_0) = (f - \lambda \text{ id})(x) = f(x) - \lambda x$, d'où $f(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, autrement dit λ est une valeur propre de f, et x vecteur propre associé.

e) Découle immédiatement de la question précédente.

4)

5) a) $C - xI_n = \begin{pmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \\ & & & -x & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} - x \end{pmatrix}$

On vérifie facilement que les $n-1$ premières colonnes forment une famille libre, donc $\mathrm{rg}(C - xI_n) \geq n-1$.
Soit λ une valeur propre de C, et $\mathrm{Ker}\ (C - \lambda I_n)$ le sous espace vectoriel propre associé, donc $\mathrm{Ker}\ (C - \lambda I_n) \neq \{0\}$, d'où $\dim \mathrm{Ker}\ (C - \lambda I_n) \geq 1$, or $\mathrm{rg}(C - \lambda I_n) \geq n-1$ donc $\dim \mathrm{Ker}\ (C - \lambda I_n) = n - \mathrm{rg}(C - \lambda I_n) \leq 1$, d'où l'égalité $\dim \mathrm{Ker}\ (C - \lambda I_n) = 1$.

b) D'aprés 2.e et 3.d les racines de P sont exactement les valeurs propres de C, supposons donc que C admet r valeurs propres deux à deux distinctes, $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, alors

$$\begin{aligned} C \text{ est diagonalisable } &\iff \mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}\ (C - \lambda_i I_n) \\ &\iff \dim \mathbb{C}^n = \dim \left(\bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}\ (C - \lambda_i I_n)\right) \\ &\iff n = \sum_{i=1}^r \dim(\mathrm{Ker}\ (C - \lambda_i I_n)) = r \end{aligned}$$

6) a) Application 2 : A_1 est la matrice compagnon associé à $P(X) = X^4 - 1$ qui admet exactemnt 4 racines qui sont $e^{i\frac{k\pi}{2}}$ avec $0 \leq k \leq 3$, donc diagonalisable.

b) Application 3 : A_2 est la matrice compagnon associé à $P(X) = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4 = (X-1)^2(X-2)(X+2)$ qui admet seulement 3 racines , donc n'est pas diagonalisable.

7) a) Evident, puique $C - tI_n = {}^t(B - tI_n)$.

b) λ valeur propre de $B \iff B - tI_n$ non inversible, $\iff C - tI_n$ non inversible $\iff \lambda$ valeur propre de C.

c) λ valeur propre de B et $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ vecteur propre associé, donc $BX = \lambda X$, d'où le système :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_i = \lambda x_{i-1} \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_{n-1} = \lambda x_1 \end{cases}$$

Ainsi $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une suite géometrique de raison λ, d'où $x_i = \alpha \lambda^{i-1}$, où
$\alpha = x_1$, donc $X_\lambda = (\lambda^{i-1})_{1\leq i\leq n}$ base du sous-espace propre $\mathrm{Ker}\ (B - \lambda I_n)$.

d) Si P admet n racines, alors C admet n valeurs propres distinctes, car les racines de P sont les valeurs propres de C, donc B admet aussi n valeurs propres, d'aprés 6.b, donc B est diagonalisable, donc $E = \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Ker}\ (B - \lambda_i I_n)$, donc $\mathcal{B}_1 = (X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n})$ est une base de E, car chaque X_{λ_i} forme une base de $\mathrm{Ker}\ (B - \lambda_i I_n)$, avec $P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1} = V$ est inversible.

8) a) Comme $\mathrm{card}\mathcal{B}_a = n = \dim \mathbb{C}^n$, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(a) = 0$.

On a $u(\varepsilon_j) = \mu_j \varepsilon_j$, donc $u^i(\varepsilon_j) = \mu_j^i \varepsilon_j$, donc $u^j(a) = \sum_{j=1}^n \mu_j^i \varepsilon_j$, d'où $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n \mu_j^i \varepsilon_j\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu_j^i \lambda_i\right) \varepsilon_j = 0$, or $\mathcal{B} = (\varepsilon_n, \cdots, \varepsilon_n)$ est une base de E, donc $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_j^i \lambda_i$, d'où l'équation $VX = 0$, où $V = (\mu_j^{i-1})_{1\leq i,j\leq n}$ et $X = (\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$, or V est inversible, donc $X = 0$. CQFD.

b) Prendre $b_k = -\beta_k$ tel que $u^n(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k u^k(a)$, ce qui possible car $\mathcal{B}_a$ base de E et $u^n(a) \in E$.