MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Devoir Libre N°7

Intégration sur un segment - DS 99-2000

A rendre Mercredi le 20 Fevrier 2003

I – Solutions d'une équation différentielle

Dans toute la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ (1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout réel λ, on définit la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0 \quad f_\lambda(x) = \frac{\ln x+\lambda}{1+x^2}$ et on note (C_λ) sa courbe représentative dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

- **a.** Soit $M(\alpha,\beta)$ un point du plan avec $\alpha > 0$. Montrer que par M passe une et une seule courbe (C_λ).
- **b.** Montrer que pour tout réel λ, la fonction f_λ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **c.** Montrer que pour tout $x > 0$, $f'_\lambda(x)$ est du signe de $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln x + \lambda)$.
- **d.** Etudier les variations de g_λ. On montrera en particulier que l'équation $g_\lambda(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^*$; cette solution sera notée m_λ.
- **e.** Dresser le tableau de variations de f_λ. On calculera les limites de f_λ en 0 et $+\infty$, et on montrera que $f_\lambda(m_\lambda) = \frac{1}{2m_\lambda^2}$.
- **f.** Représenter sur un même graphique les courbes (C_{-1}), (C_0) et (C_1). On donnera des valeurs approchées de m_{-1} et m_0 à 10^{-2} près en précisant la méthode utilisée, ainsi que la valeur *exacte* de m_1.

3. Dans cette question, on cherche un équivalent de m_λ lorsque λ tend vers $+\infty$.

- **a.** Montrer que pour λ assez grand, on a : $\frac{1}{\lambda} \leqslant m_\lambda \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.
- **b.** En déduire, à l'aide des questions précédentes, que $m_\lambda \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

II – Etude d'une fonction intégrale

On étudie dans cette partie la fonction F définie par : $\forall x > 0 \quad F(x) = \int_1^x f_0(t)\,dt = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$. La courbe représentative de F sera notée Γ.

1.
- **a.** Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **b.** Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **c.** Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
- **d.** Ecrire le développement limité de F à l'ordre 3 au voisinage de $x = 1$.

2. Montrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = F(\frac{1}{x})$.

3.
- **a.** Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0 \quad \phi(x) = \frac{\arctan x}{x}$.

  Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0.
- **b.** Montrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = \arctan x \ln x - \int_1^x \phi(t)\,dt$.
- **c.** En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. La nouvelle fonction ainsi obtenue sera encore notée F.

  Que peut-on dire de F au voisinage de $+\infty$?
- **d.** Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0. Que peut-on dire de Γ au point d'abscisse 0 ?

4. Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.

- **a.** Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t\,dt$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.

c. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]0, 1\right[$, une majoration de $\left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \right|$.

d. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |F(0) - u_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)^2}$.

e. Donner, en *détaillant la méthode utilisée*, une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$.

5. Tracer l'allure de la courbe Γ. On précisera le point d'inflexion.