DL 9 : *Intégration sur un segment*

A rendre Samedi 14 Mai 2004

Les deux problèmes sont tirés du concours 1997 EDHEC (Ecole de commerce)

Problème 1:

Dans ce problème, E désigne l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{R})$. Soit Δ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $\Delta(f) = g$, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E.
2. (a) Vérifier que, pour toute fonction f de E, $\Delta(f)$ est dérivable.
   (b) En déduire que Δ n'est pas surjective.
3. Montrer que Δ est injective.
4. On suppose, *dans cette question*, que Δ possède une valeur propre λ non nulle et on désigne par f un vecteur propre associé à λ.
   (a) Montrer que la fonction h, définie pour tout réel x, par $h(x) = f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}$, est constante.
   (b) Déterminer alors $\Delta(f)$.
5. Conclure à l'aide des questions précédentes que Δ n'a aucune valeur propre.
6. Pour toute fonction f de E, on pose : $F_0 = \Delta(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = \Delta(F_{n-1})$
   (a) Montrer que F_n est de classe C^{n+1}.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt$.

Problème 2:

On considère les fonction f et g définies par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt \quad si\ x \neq 0. \ln(2) \quad sinon., \qquad g(t) = \frac{\sin t - t}{t^2}\,dt \quad si\ t \neq 0.0 \quad sinon.$$

1. Montrer que $\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} g(t)\,dt = 0$. En déduire que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x non nul.
3. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
4. Montrer que f est paire.Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \qquad |f(x)| < \frac{1}{2x}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
6. Montrer que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ et que $f(\pi) < 0$.
7. Montrer que $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right) \sin t\,dt$. En déduire que $f(2\pi) > 0$.
8. Tracer, dans un repère orthonormé, les hyperboles d'équations respectives $y = \frac{1}{2x}$ et $y = -\frac{1}{2x}$, ainsi que l'allure de la courbe représentative de la restriction de f à $[-2\pi, 2\pi]$.

FIN