**MPSI 1** **2002-2003**

**CPGE Agadir**

# Devoir Surveillé N° 6

**Lundi le:24-Février-2003**

*Durée* : 4h

*Programme* : Intégration sur un segment

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Notaion : pour une suite $(u_p)_{p\in IN^*}$ , si la suite $\left(\sum_{p=1}^{n} u_p\right)$ quand $n \to +\infty$ converge on note par $\sum_{p=1}^{+\infty} u_p$

On étudie dans ce problème la suite $(S_n)$ définie pour $n \geq 1$ par:

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{n}^2} \quad \text{c'est à dire } S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{p}^2}.$$

Dans la partie I, on détermine la limite $S$ de la suite $(S_n)$. Dans les parties II et III, on explicite deux méthodes indépendantes permettant d'accélérer la convergence de $(S_n)$ vers $S$.

**Partie I** : On considère pour tout nombre entier $p \geq 0$ les deux intégrales suivantes:

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} t\, dt, \qquad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p} t\, dt.$$

**1. Convergence de la suite $\frac{J_p}{I_p}$**

**a.** Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel $t$ tel que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$:

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin t.$$

**b.** Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $p \geq 0$:

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1}).$$

**c.** Exprimer $I_{p+1}$ en fonction de $I_p$ en intégrant par parties l'intégrale $I_{p+1}$ (on pourra poser $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = \cos^{2p+1} t$ dans l'intégration par parties).

**d.** Déduire des résultats précédents que $\frac{J_p}{I_p}$ tend vers 0 quand $p$ tend vers $+\infty$.

**2. Convergence et limite de la suite $(S_n)$**

**a.** Exprimer $I_p$ en fonction de $J_p$ et $J_{p-1}$, en intégrant deux fois par parties l'intégrale $I_p$ $(p \geq 1)$.

**b.** En déduire la relation suivante pour $p \geq 1$:

$$\frac{\mathrm{J_{p-1}}}{\mathrm{I_{p-1}}} - \frac{\mathrm{J_p}}{\mathrm{I_p}} = \frac{1}{2\mathrm{p}^2}.$$

**c.** Calculer $J_0$ et $I_0$, puis déterminer la limite $S$ de la suite $(S_n)$.

**Partie II**:

On accélère ici la convergence de la suite $(S_n)$ vers sa limite $S$ par une méthode due à Stirling.

On désigne par:

- $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $]0,+\infty[$ dans $IR$ et de limite nulle en $+\infty$.
- $f_k$ la fonction de $E$ définie pour tout nombre entier naturel $k$ par:

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)...(x+k)} \text{ pour } k \geq 1.$$

- $\Delta$ l'application associant à toute fonction $f$ de $E$ la fonction $\Delta f$ définie pour $x > 0$ par:

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

**1**. **Sommes téléscopiques**:

**a**. Etablir que $\Delta$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $E$.

**b**. Etablir pour toute fonction $f$ appartenant à $E$ la convergence de la suite $\left(\sum_{p=1}^{n}(\Delta f)(p)\right)_{n\geq 1}$ et calculer pour tout nombre entier naturel $n$ les sommes suivantes:

$$\sum_{p=1}^{+\infty}(\Delta f)(p), \qquad \sum_{p=n+1}^{+\infty}(\Delta f)(p).$$

**c**. Exprimer $\Delta f_{k-1}$ en fonction de $k$ et de $f_k$ pour $k \geq 1$.

**d**. Etablir pour tout nombre entier naturel $k \geq 1$ la convergence de la suite $\left(\sum_{p=1}^{n} f_k(p)\right)_{n\geq 1}$ et vérifier, pour tout nombre entier naturel $n$, que:

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k}\frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+k)}.$$

**2**. Accélération de la convergence de $(S_n)$

**a**. Etablir la relation suivante pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}(k-1)!f_k(p) = \frac{q!}{p}f_q(p).$$

**b**. En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}\frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

**c**. En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite $(S'_n)$ de nombres rationnels telle que:

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

Expliciter $S'_n$ et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

Ecrire en PASCAL ou Maple un algorithme calculant et affichant $S'_n$ pour $q = 2$ lorsque $n$ est donné.

**Partie III** :

On accélère ici la convergence de la suite $(S_n)$ vers sa limite $S$ en effectuant un développement limité de $S_n$ suivant les puissances de $\frac{1}{n}$.

**1**. Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels $(u_n)$ telle que

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{p=1}^{n}\frac{u_{n-p}}{p} = 0 \textit{ pour tout nombre entier } n \geq 2.$$

**2**. **Etude des polynomes de Bernouilli** :

**a**. Établir que les $u_n$ sont rationnels et donner $u_1, u_2, u_3, u_4$ sous forme de fraction irréductible.On considère la suite de polynômes $(U_n)$ définie par:
$U_0(x) = 1$ et $U_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{n-p}x^p}{p!}$ pour tout nombre entier $n \geq 1$.

- Préciser $U_1, U_2, U_3, U_4$.
- Montrer que $U_n' = U_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $U_n(0) = U_n(1)$ pour $n \geq 2$.

**b**. On considère une suite de polynômes $(V_n)$ définie par:
$V_0 = 1,\quad V_n' = V_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $V_n(0) = V_n(1)$ pour $n \geq 2$.

- Établir que $V_n^{(p)}(0) = V_{n-p}(0)$ pour $0 \leq p \leq n$ et en déduire la formule suivante: $V_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{V_{n-p}(0)x^p}{p!}$.
- Établir la formule suivante pour tout nombre entier $n \geq 2$: $\sum_{p=1}^{n} \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0$.
- Établir enfin que $V_n = U_n$ pour tout nombre entier naturel $n$.

**c**. En déduire l'égalité $U_n(x) = (-1)^n U_n(1-x)$ pour tout nombre entier naturel $n$.
Montrer alors que $u_{2p+1} = 0$ si $p \geq 1$.

**3) Accélération de la convergence de** $(S_n)$

Etablir pour $p \geq 1$ la relation suivante, supposant $q \geq 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{q}(2k)!u_{2k}\left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}}\right) = (2q+2)!\int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)}{(x+p)^{2q+3}}dx$$

**a**. En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$ : $\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(2k)!u_{2k}}{n^{2k+1}}\right| \leq \frac{(2q+1)!M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$.où $M_{2q+1}$ désigne le maximum de la fonction continue $x \mapsto |U_{2q+1}(x)|$ sur le segment $[0,1]$.

**b**. En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite $(S_n'')$ de nombres rationnels telle que: $\left|\frac{\pi^2}{6} - S_n''\right| \leq \frac{(2q+1)!M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$.

**c**. Expliciter $S_n''$ et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

**d**. Ecrire en PASCAL ou en Maple un algorithme calculant et affichant $S_n''$ pour $q = 2$ lorsque $n$ est donné.