بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

# Corrigé Contrôle (07-08) : *Intégration sur un segment*

**Mardi 08 Avril 2008.**

**<u>Durée</u> : 2heures**

EXERCICES.
Voir TD.

PROBLÉME .

**1)** a) – Si $\alpha = 0, \beta = 0$, alors $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} g_{\alpha,\beta}(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 1} g_{\alpha,\beta}(t) = 1$.
– Si $\alpha = 0, \beta > 0$, alors $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} g_{\alpha,\beta}(t) = 1, \lim\limits_{t \longrightarrow 1} g_{\alpha,\beta}(t) = 0$.
– Si $\alpha > 0, \beta = 0$, alors $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} g_{\alpha,\beta}(t) = 0, \lim\limits_{t \longrightarrow 1} g_{\alpha,\beta}(t) = 1$.
– Si $\alpha >, \beta > 0$, alors $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} g_{\alpha,\beta}(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 1} g_{\alpha,\beta}(t) = 0$.
Dans tous les cas on pose $g_{\alpha,\beta}(0) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} g_{\alpha,\beta}(t), g_{\alpha,\beta}(1) = \lim\limits_{t \longrightarrow 1} g_{\alpha,\beta}(t)$.

b) $I(\alpha, 0) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

c) $I(\alpha, \beta) = I(\beta, \alpha)$, à l'aide du changement de varaiable $u = 1 - t$.

d) Par intégration par parties, on a : $I(\alpha+1, \beta) = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{t^{\alpha+1}}_{u} \underbrace{(1-t)^{\beta}}_{v'} \mathrm{dt} = \left[ -t^{\alpha+1} . \frac{(1-t)^{\beta+1}}{\beta+1} \right]_0^1 +$
$\dfrac{\alpha}{\beta+1} \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta+1}\mathrm{dt} = \dfrac{\alpha}{\beta+1} I(\alpha, \beta+1)$.

e) A l'aide d'une récurrence (soigneusement ridigée comme c'est demandé en utilisant les formules : $I(\alpha, n+1) = \dfrac{n+1}{\alpha} I(\alpha+1, n), I(\alpha, 0) = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

**2)** a) $x \in D_{f_a} \iff \dfrac{x-a}{x} > 0 \iff x > 0$ ou $x < 0$, donc $D_{f_a} = ]-\infty, 0[ \cup ]a, +\infty[$.

b) Posons $u = -\dfrac{a}{x} \in ]-1, 0[$, l'inégalité demandée devient $\dfrac{u}{1+u} \leq \ln(1+u) \leq u$, qu'on vérifie par une simple étude de fonctions.

c) $f_a'(x) = \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) + \dfrac{x^2}{x-a} > 0$ sur $]a, +\infty[$, donc $f_a$ est croissante. D'autre part d'après la question précédente on a : $-\dfrac{xa}{x-a} \leq x \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) = f_a(x) \leq -a$, donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_a(x) = -a$, alors que $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f_a(x) = -\infty$.

d) Traçons les courbes en Maple© :

```
> plot([x*ln(1-1/x), x*ln(1-2/x),x*ln(1-3/x)], x=1..100,
> color=[red,blue,green], style=[point,line,point]);
```

FIG. 1 – Courbes : $C_0, C_1, C_2$

**3)** D'aprés la question précédente $\ln y_n = f_a(n)$ est croissante et converge vers $-a$, donc $y_n$ est croissante et converge $\mathrm{e}^{-a}$

**4)** a) Facile ; Poser comme changement de variable : $t = \dfrac{u}{n}$.

b) $f_u$ est croissante
$$\begin{aligned}&\Longrightarrow f_u(n) \le f_u(n+1)\\ &\Longrightarrow \left(1-\tfrac{u}{n}\right)^n \le \left(1-\tfrac{u}{n+1}\right)^{n+1}\\ &\Longrightarrow \left(1-\tfrac{u}{n}\right)^n u^x \le \left(1-\tfrac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x\\ &\Longrightarrow \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x \mathrm{d}u \le \int_0^n \left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \mathrm{d}u\\ &\Longrightarrow \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x \mathrm{d}u \le \int_0^{n+1} \left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \mathrm{d}u\\ &\Longrightarrow F_n(x) \le F_{n+1}(x)\end{aligned}$$

c) i. $\lim\limits_{u\longrightarrow+\infty} u^{x+2}\mathrm{e}^{-u} = 0$, car $u^{x+2}$ qui est un logarithme est négligeable au voisinage de $\infty$ devant les exponentielles. En utilisant la definition de la limite pour $\varepsilon = 1$ on en déduit l'inégalité demandée

ii. D'après 2.e) $\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \le \mathrm{e}^{-a}$, donc $F_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x \mathrm{d}x \le \int_0^n \mathrm{e}^{-a}u^x \mathrm{d}x = \int_0^A \mathrm{e}^{-a}n^x \mathrm{d}x + \int_A^n \mathrm{e}^{-a}u^x \mathrm{d}x \le \int_0^A \mathrm{e}^{-a}n^x \mathrm{d}x + \int_A^n \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^A \mathrm{e}^{-a}n^x \mathrm{d}x + \frac{1}{A} - \frac{1}{n} \le \int_0^A \mathrm{e}^{-a}n^x \mathrm{d}x + \frac{1}{A}$

iii. D'après la question précédente $F_n(x)$ est majorée or elle est croissante donc converge. D'autre part, en utilisant 3.a) on a : $\dfrac{F_n(x+1)}{F_n(x)} = (x+1)\dfrac{n}{x+n+2}$, donc au passageà limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on obtient $\dfrac{F(x+1)}{F(x)} = (x+1)$

*Fin*