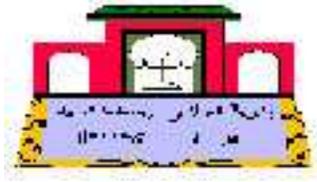


CPGE My Youssef, Rabat



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
رَبِّي إِشْرَحَ لِي صَدْرِي وَ يَسَّرَ لِي أَمْرِي وَ
أَحْلَلَ عُقْدَةَ مِن لِسَانِي يَفْقَهُوا قَوْلِي
صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمِ
سورة طه

Contrôle: *Intégration sur un segment*

Judi 7 Mai 2009
Durée : 1 heure

Blague du jour :

• Une souris rencontre sa copine : J'ai décidé de me mettre au régime, lui dit-elle. Tu ne manges plus ton gruyère alors ?

Réponse : Si, mais je ne mange plus que les trous !

• Comment appelle t-on un chien sans pattes ?

Réponse : On ne l'appelle pas, on va le chercher !

• Comment appelle-t-on une chauve-souris qui a des cheveux ?

Réponse : Une souris.

Mathématicien du jour

Ibn al-Banna

Ibn al-Banna al-Marrakushi al-Azdi encore appelé Abu'l-Abbas Ahmad ibn Muhammad ibn Uthman al-Azdi (1256-1321), était un mathématicien et astronome arabe.

Il acquit les compétences basiques de son époque en mathématiques et en géométrie et traduisit les *Éléments* d'Euclide en arabe. Il écrivit de plus entre 51 et 74 traités, traitant de sujets aussi variés que l'algèbre, l'astronomie, la linguistique, la logique, la théorie des fractions continues, calculs du niveau dans un canal d'irrigation, explications mathématiques des lois islamiques sur l'héritage, calculs des taxes légales suite à un retard de paiements.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précédente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroté les double feuille de la façon suivante : $1/n, 2/n, \dots, n/n$ où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

PROBLÈME :

Source : Extrait du concours 2004, Petites Mines.

Soient un réel x et k un entier strictement positif. On pose $I_k(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k(t)}$.

- Q1)** Calculer $I_1(x)$ (on pourra faire le changement de variable $u = e^t$).
- Q2)** Calculer $I_2(x)$.
- Q3)** a) En intégrant par parties, trouver une relation entre I_{k+2} et I_k (on pourra remarquer que $\frac{1}{\operatorname{ch}^k(t)} = \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^{k+1}(t)}$).
- b) En déduire I_3 et I_4 .
- Q4)** Démontrer que la fonction $I_k : x \mapsto I_k(x)$ est :
- a) impaire.
- b) continue sur \mathbb{R} .
- c) de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- Q5)** Calculer I'_k , I''_k et I'''_k .
- Q6)** Donner le développement limité de I_k à l'ordre 3 au voisinage de 0.
- Q7)** Démontrer que I_k est monotone sur \mathbb{R} .
- Q8)** On se propose, pour k fixé, d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = I_k(n)$.
- a) Montrer que cette suite est monotone.
- b) Démontrer que, pour tout t , $\frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \leq 2e^{-t}$; en déduire que la suite converge.
- Q9)** On pose, sous réserve d'existence, $J_k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k(t)}$, notée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^k(t)}$.
- a) Démontrer l'existence de J_k .
- b) Calculer J_1 et J_2 .
- c) Calculer J_k .

Fin
Bonne chance