CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé Contrôle Blanc: *Intégration sur un segment*

Jeudi 7 Mai 2009
Durée : 1 heure

Blague du jour :
Mamie dit à son petit-fils :
- Puisque c'est ton anniversaire, je vais te faire un gâteau avec douze bougies !
- Tu sais, Mamie, ce que je préférerais, c'est que tu me fasses douze gâteaux avec une une bougie.

Mathématicien du jour — ***Al- Hassâr***
Abû Bakr Mohammed b. Abd Allâh ibn 'Ayyâsh al-Hassâr est un mathématicien marocain du 12ème siècle, probablement originaire de Salé. Al-Hassâr fut bien connu comme lecteur du Coran et comme spécialiste du calcul des héritages, et qu'il jouissait d'un haut statut social.
Deux écrits d'al- Hassar ont survécu, Kitâb al-bayân wa t-tadhkâr, est conu aussi comme le "petit al-Hassâr" et al-Kitâb al-kâmil fi sinâ'at al-'adad traitant de numération, des opérations arithmétiques sur les nombres entiers et sur les fractions, l'extraction de la racine carrée exacte ou approximative d'un nombre entier ou fractionnaire et la sommation des progressions de nombres entiers (naturels, pairs ou impairs), et de leurs racines carrées et cubiques

---

Problème : — **Source : Pr David Delaunay, MPSI-Lorient, France.**

Q1) En posant $u = e^t$, on a $I_1(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \frac{2du}{u^2+1} = \boxed{2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}}$.

Q2) $\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$ donc $\boxed{I_2(x) = \mathrm{th}(x)}$ $(\mathrm{th}(0) = 0)$.

Q3) a) $I_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{ch}(t)dt}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}$, on pose $u' = \mathrm{ch}(t)$ et $v = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}$, on a alors :

$$I_k(x) = \left[\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}\right]_0^x + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{sh}^2(t)dt}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}$$

en écrivant que $\mathrm{sh}^2(t) = \mathrm{ch}^2(t) - 1$, on obtient $I_k(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)[I_k(x) - I_{k+2}(x)]$, on en déduit que :

$$\boxed{I_{k+2}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{(k+1)\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1} I_k(x)}.$$

.

b) On a donc $I_3(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{2\mathrm{ch}^2(x)} + \frac{1}{2}I_1(x) = \boxed{\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{2\mathrm{ch}^2(x)} + \arctan(e^x) - \dfrac{\pi}{4}}$. De même, $I_4(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{3\mathrm{ch}^3(x)} + \frac{2}{3}I_2(x) = \boxed{\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{3\mathrm{ch}^3(x)} + \dfrac{2}{3}\mathrm{th}(x)}$.

Q4) Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}$ est définie continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction I_k est définie sur $\mathbb{R}$.

a) $I_k(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{dt}{\mathrm{ch}^k(t)} = -\int_0^x \frac{du}{\mathrm{ch}^k(-u)}$ en posant $u = -t$, ce qui donne $I_k(-x) = -I_k(x)$, la fonction I_k est donc $\boxed{\text{impaire}}$.

b) D'après le cours, I_k est la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}$, par conséquent I_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}}$.

c) La dérivée de I_k est la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux. Donc I_k est également de classe $\boxed{\mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Q5) $I_k'(x) = \boxed{\dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(x)}}$, $I_k''(x) = \boxed{-\dfrac{k\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)}}$ et $I_k'''(x) = -k[\dfrac{\mathrm{ch}(x)^{k+2}(x) - (k+1)\mathrm{sh}^2(x)\mathrm{ch}^k(x)}{\mathrm{ch}^{2k+2}(x)}] = \boxed{-\dfrac{k(1-k\mathrm{sh}^2(x))}{\mathrm{ch}^{k+2}(x)}}$.

Q6) D'après la formule de TAYLOR-YOUNG, on a $I_k(x) = I_k(0) + I_k'(0)x + \frac{1}{2}I_k''(0)x^2 + \frac{1}{6}I_k'''(0)x^3 + \underset{0}{o}(x^3)$, ce qui donne :

$$\boxed{I_k(x) = x - \frac{k}{6}x^3 + \underset{0}{o}(x^3)}.$$

Q7) $I_k'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(x)} > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction I_k est donc $\boxed{\text{strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

Q8) a) $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{\mathrm{ch}^k(t)} > 0$ (intégrale d'une fonction strictement positive sur un segment), on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante}}$.

b) Comme $\mathrm{ch}(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$, on a $\frac{1}{2}e^t \leqslant \mathrm{ch}(t)$, d'où $\boxed{\dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} \leqslant 2e^{-t}}$. Par conséquent, $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(t)} \leqslant 2^k e^{-kt}$ et donc $I_k(n) \leqslant \displaystyle\int_0^n 2^k e^{-kt}\,dt = \frac{2^k}{k}[1-e^{-kn}]$ (car $k > 0$), on a donc $I_k(n) \leqslant \frac{2^k}{k}$, c'est à dire $u_n \leqslant \frac{2^k}{k}$, la suite (u_n) est majorée, comme elle est croissante, on peut en déduire $\boxed{\text{qu'elle est convergente}}$.

Q9) a) La fonction I_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, si elle n'était pas majorée, alors elle aurait pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (théorème du cours), par conséquent la suite $(I_k(n))$ aurait aussi pour limite $+\infty$, ce qui est faux d'après la question précédente; par conséquent la fonction I_k est majorée sur $\mathbb{R}$ et elle admet donc une limite finie en $+\infty$, autrement dit, $\boxed{J_k \text{ existe dans } \mathbb{R}}$.

b) $J_1 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_1(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

$J_2 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_2(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = \boxed{1}$.

c) On a a la relation $I_{k+2}(x) = \dfrac{x}{(k+1)\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \dfrac{}{k+1}I_k(x)$, on sait que $\mathrm{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^x$ et que $\mathrm{ch}^{k+1}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{k+1}}e^{(k+1)x}$, par conséquent $\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{(k+1)\mathrm{ch}^{k+1}(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^k}{k+1}e^{-kx} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\boxed{J_{k+2} = \dfrac{k}{k+1}J_k}$

(Rmq : avec cette relation il est facile de voir que la suite (kJ_kJ_{k+1}) est constante).

Ce qui donne : $J_{2k} = \dfrac{2k-2}{2k-1} \times \cdots \times \dfrac{2}{3}J_2 = \boxed{\dfrac{4^k[k!]^2}{(2k)!(2k)}}$ (récurrence) et

$J_{2k+1} = \dfrac{2k-1}{2k} \times \cdots \times \dfrac{1}{2}J_1 = \boxed{\dfrac{(2k)!}{4^k[k!]^2}\dfrac{\pi}{2}}$ (récurrence).