CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé Contrôle 6: *Intégration* *Espaces vectoriels.*

Lundi 11 Mai 2009
Durée : 2 heures

Blague du jour :
C'est l'histoire de deux fous qui marchent dans la rue, un des deux prend une merde (hachakoum) dans sa main et dit à son pote : En plus que fou tu es aveugle, regarde sur quoi on allait marcher !

Personnalité du jour ***Bessel***
Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) est un astronome et mathématicien allemand, connu principalement pour avoir effectué les premières mesures précises de la distance d'une étoile et pour être le fondateur de l'école allemande d'astronomie d'observation.
Bessel supervise la construction de l'observatoire de Königsberg, dont il sera le directeur de 1813 jusqu'à sa mort. Il élabore le système unifié de calcul des positions des étoiles, encore utilisé de nos jours.

Problème : **Source : Pierre Bron, TSI, Lycée Chaptal, France.**

Partie 1 : Quelques résultats préliminaires

1.1) φ **et** ψ **sont** C^∞ **sur** $[1,+\infty[$ **et** $\forall x \in [1,+\infty[$:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$$

$$\psi'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-1}{(x+2)(x+1)^2} < 0.$$

$\boxed{\varphi \text{ est donc croissante et } \psi \text{ décroissante sur } [1,+\infty[.}$

En outre, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$.

D'où les tableaux de variations :

x	1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$1/4$	$+$	
$\varphi(x)$	$1/2 - \ln 2$	$\nearrow$	0

et

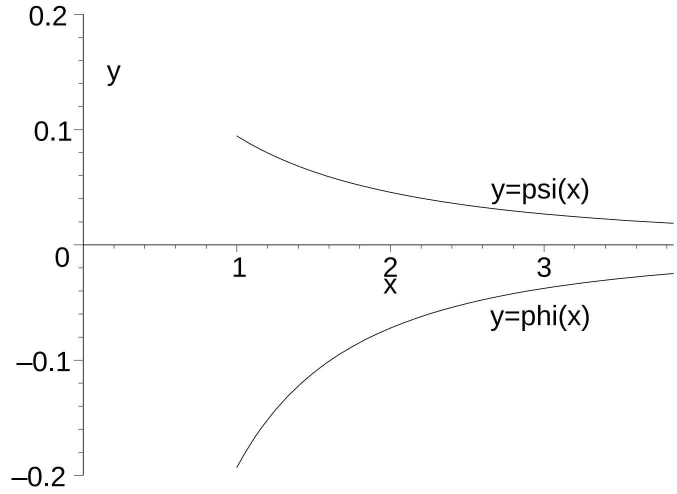
x	1		$+\infty$
$\psi'(x)$	$-1/12$	$-$	
$\psi(x)$	$1/2 - \ln 3/2$	$\searrow$	0

.

On obtient :

$$\boxed{\forall x \in [1,+\infty[,\ \ \varphi(x) < 0 \text{ et } \psi(x) > 0}$$

1.2) On obtient ainsi les représentations graphiques :



2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \varphi(n) < 0$ **et** (u_n) **est décroissante.**
$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) = \psi(n) > 0$ **et** (v_n) **est croissante.**
Enfin $u_n - v_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ **qui tend vers** 0 **en** $+\infty$**.**
<u>**Les suites** (u_n) **et** (v_n) **sont donc adjacentes.**</u>

3.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$**.** f **est une fonction rationnelle continue sur** $]0,1]$**. En** 0**,** $f(x) = \dfrac{1-(1-nx+o(x))}{x} = n + o(1)$ **et** f **se prolonge par continuité en** 0**. D'où :**

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,1]}.$$

3.2)
$$\begin{aligned} f(X) &= \frac{1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^k}{X} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} X^k}{X} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1} X^k \end{aligned}$$
et :

$$\boxed{f(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1} X^k}$$

3.3) La famille $(1, X-1, (X-1)^2, \cdots, (X-1)^{n-1})$ **est une famille de polynômes de degrés échelonnés, donc libre dans l'espace vectoriel** ■$n-1[X]$**. D'autre part,** $\dim$ ■$n-1[X] = n$ **et la famille comprend** n **polynômes :**
<u>$(1, X-1, (X-1)^2, \cdots, (X-1)^{n-1})$ **est donc une base de** ■$n-1[X]$**.**</u>

On a aussi
$$\begin{aligned} f(X) &= \frac{X \sum_{k=0}^{n-1} (1-X)^k}{X} \quad \text{car } a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (1-X)^k \end{aligned}$$

et :

$$\boxed{f(X)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(X-1)^k}$$

3.4) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\ dx &= \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\binom{n}{p+1}\int_0^1 x^p dx\\ &= \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\binom{n}{p+1}\frac{1}{p+1}\\ &= \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}\binom{n}{p}}{p}\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\ dx &= \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\int_0^1 (x-1)^p dx\\ &= \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\frac{(-1)^{p+2}}{p+1}\\ &= \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\end{aligned}.$$

On a donc :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\ dx=\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}\binom{n}{p}}{p}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}}$$

<u>**Partie 2 : Transformée de Laplace**</u>

4) $\displaystyle\int_x^a \ln(t)\ dt=[t\ln(t)-t]=a\ln(a)-a-x\ln(x)+x$ **qui tend vers** $a\ln(a)-a$ **quand** x **tend vers** 0.

On en déduit que $\forall a\in$ أ$+*$, $\ln$ **(continue sur** $]0,a]$ **et de signe constant sur** $]0,1]$**) est intégrable sur** $]0,a]$**.**

En outre, l'on sait que $\forall x\in$ أ$+*$, $\ln(x)<x$ **et donc, pour** $A=1,\ \beta=1$ **et** $n=1$**,** $\forall x\in[A,+\infty[,\ 0\leq \ln(x)<\beta x^n$**.**

Donc <u>$\ln\in E$.</u>

5) Soient f **et** $g\in E$ **et** λ **et** $\mu\in\mathbb{C}$**. Alors** $\lambda f+\mu g\in C(]0,+\infty[,\mathbb{C})$**,** $\lambda f+\mu g$ **est intégrable sur tout** $]0,a],\ a>0$**, et s'il existe** $A,\ B>0,\ \beta,\ \gamma>0,\ m,\ n\in\mathbb{N}$ **tels que :**

$\forall x\in[A,+\infty[,\ |f(x)|\leq\beta x^n$

$\forall x\in[B,+\infty[,\ |g(x)|\leq\gamma x^m$**,**

et par exemple $n\leq m$**,** $\exists C>0$ **tel que si** $x>C,\ |\lambda|\beta x^{n-m}\leq|\lambda|\beta$**. D'où pour** $x>\max(A,B,C)=D$

$$\begin{aligned}|(\lambda f+\mu g)(x)| &\leq |\lambda||f(x)|+|\mu||g(x)|\\ &\leq |\lambda|\beta x^n+|\mu|\gamma x^m\\ &\leq (|\lambda|\beta x^{n-m}+|\mu|\gamma)x^m\\ &\leq (|\lambda|\beta+|\mu|\gamma)x^m\end{aligned}$$

Donc $\lambda f+\mu g\in E$**. Comme** $E\neq\emptyset$**,**

$$\boxed{E \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel, sous-espace de } C(]0,+\infty[,\mathbb{C})}$$

6) Tout d'abord, φ_x **est continue sur** أ$+*$**.**

D'autre part, $\exists A>0,\ \beta>0,\ n\in\mathbb{N}$ **tels que pour** $x>A,\ |f(x)|\leq\beta x^n$**. D'où pour** $t>A,\ |\varphi_x(t)|\leq\beta t^n e^{-xt}$**. On en déduit que** $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\varphi_x(t)=0$**, ce qui permet d'affirmer que** φ_x **est intégrable sur** $[1,+\infty[$**.**

Enfin $|\varphi_x|\leq|f|$ **ce qui permet d'affimer que** φ_x **est intégrable sur** $]0,1]$**.**

Donc,

$$\boxed{\varphi_x \textbf{ est intégrable sur } أ+*}$$

7) <u>**$\mathcal{L}$ est linéaire car l'intégrale est linéaire.**</u>

8) f est continue sur أ+ ; donc f est intégrable sur tout $]0,a],\ (a>0)$.
Il existe $A>0,\ \beta>0,\ n\in\mathbb{N}$ tels que $\forall u\geq A,\ |f'(u)|\leq \beta u^n$
D'où, pour tout $t\geq A$,

$$\begin{aligned}
|f(t)| &= |f(A)+\int_A^t f'(u)\ du| \\
&\leq |f(A)|+\int_A^t |f'(u)|\ du| \\
&\leq |f(A)|+\int_A^t \beta u^n\ du| \\
&\leq |f(A)|+\beta\frac{t^{n+1}-A^{n+1}}{n+1} \\
&\leq |f(A)|+\beta\frac{t^{n+1}+A^{n+1}}{n+1} \\
&\leq K+\gamma t^{n+1}\ \textbf{(avec } K=|f(A)|+\frac{A^{n+1}}{n+1}\textbf{ et } \gamma=\frac{\beta}{n+1})
\end{aligned}$$

Or $\exists B>0,\ t\geq B\Rightarrow Kt^{-n-1}\leq 1$.
Pour $t\geq \max(A,B),\ |f(t)|\leq(\gamma+1)t^{n+1}$ et $f\in E$: $\mathcal{L}$ a un sens.
Soient $u,\ v>0$. Alors :
$\displaystyle\int_u^v f(t)e^{-xt}dt = \left[-f(t)\frac{e^{-xt}}{x}\right]_u^v+\int_u^v f'(t)\frac{e^{-xt}}{x}dt$ **par intégration par parties. En faisant tendre u vers 0 et v vers $+\infty$, on obtient :**
$\displaystyle\mathcal{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt=\frac{f(0)}{x}+\frac{\mathcal{L}(f')(x)}{x}$ **et**

$$\boxed{\forall x>0,\ \mathcal{L}(f')(x)=x\mathcal{L}(f)(x)-f(0)}$$

9) Soit $k\in\mathbb{N}$;
- $f_k\in C($أ+$*,\mathbb{C})$
- f_k se prolonge par continuité sur tout $[0,a],\ a>0$. Ce qui montre que f_k est intégrable sur tout $]0,a],\ a>0$.
- D'autre part, pour $A=1,\ \beta=1,\ n=k$ et $t\geq A,\ |f_k(t)|=t^k\leq\beta t^n$.

$$\boxed{\textbf{Donc } f_k\in E}$$

$$\begin{aligned}
I_{k+1} &= \int_0^\alpha t^{k+1}e^{-xt}dt \\
&= \left[-\frac{t^{k+1}e^{-xt}}{x}\right]_0^\alpha+\frac{1}{x}\int_0^\alpha (k+1)t^ke^{-xt}\ dt\ \textbf{(par intégration par parties)} \\
&= -\frac{\alpha^{k+1}e^{-x\alpha}}{x}+\frac{k+1}{x}I_k
\end{aligned}$$

et en faisant tendre α vers $+\infty$, l'on obtient $\forall x>0,\ \mathcal{L}(f_{k+1})(x)=\dfrac{k+1}{x}\mathcal{L}(f_k)(x)$, ce qui montre par récurrence simple :
$\forall x>0,$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_k)(x) &= \frac{k}{x}\mathcal{L}(f_{k-1})(x) \\
&= \frac{k!}{x^k}\mathcal{L}(f_0)(x)
\end{aligned}$$

Or $$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_0)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt \\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\forall x>0,\ \forall k\in\mathbb{N},\ \mathcal{L}(f_k)(x)=\frac{k!}{x^{k+1}}}$$

10.1) $f_\omega \in E$ car elle se prolonge en une fonction continue sur ℝ+ et elle est de module 1.

10.2) Pour $x>0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_\omega)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{i\omega t}e^{-xt}dt\\ &= \int_0^{+\infty} e^{t(i\omega-x)}dt\\ &= \left[\frac{e^{t(i\omega-x)}}{i\omega-x}\right]_0^{\infty}\\ &= \frac{1}{x-i\omega}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall x>0,\ \mathcal{L}(f_\omega)(x)=\frac{1}{x-i\omega}=\frac{x+i\omega}{x^2+\omega^2}}$$

10.3) En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\boxed{\forall x>0,\ \mathcal{L}(\cos_\omega)(x)=\frac{x}{x^2+\omega^2}\ \textbf{et}\ \mathcal{L}(\sin_\omega)(x)=\frac{\omega}{x^2+\omega^2}}$$

<u>Partie 3 : Transformée de Laplace de la fonction de Bessel</u>

11) Soit g l'application de $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ qui à (t,θ) associe $\cos(t\cos\theta)$.
g est évidemment C^∞ sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]=U$.

En outre, $\forall(t,\theta)\in U,\begin{cases}|g(t,\theta)|\le 1\\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial t}(t,\theta\right|=|-\cos\theta\sin(t\cos\theta)|\le 1\\ \left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,\theta\right|=|-\cos^2\theta\cos(t\cos\theta)|\le 1\end{cases}$ **et l'intégrale** $\displaystyle\int_0^\pi d\theta$ **converge.**

Cela permet d'affirmer que <u>J est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$</u> et que :

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}J'(t)=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos\theta\sin(t\cos\theta)\ d\theta\\ J''(t)=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos^2\theta\cos(t\cos\theta)\ d\theta\end{cases}}$$

12) Intégrons par parties l'intégrale qui donne J'.

$\forall t\in\mathbb{R},\ J'(t)=-\dfrac{1}{\pi}\left([\sin\theta\ \sin(t\cos\theta)]_0^\pi+\displaystyle\int_0^\pi t\sin^2\theta\ \cos(t\cos\theta)\ d\theta\right)\Rightarrow$

$$\boxed{J'(t)=-\frac{t}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta\ \cos(t\cos\theta)\ d\theta}$$

13) $\forall t\in\mathbb{R},\ tJ''(t)+J'(t)+tJ(t)=\dfrac{t}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(t\ \cos\theta)(-\cos^2\theta-\sin^2\theta+1)\ d\theta=0$**. D'où :**

$$\boxed{J \textbf{ est solution de l'équation différentielle } (E):tJ''+J'+tJ=0}$$

14) J est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et intégrable sur tout $]0,a]$ où $a>0$.

D'autre part, $\forall t \in [1,+\infty[,\quad |J(t)| \begin{aligned}[t] &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(t\cos\theta)|\ d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ d\theta \\ &\leq 1t^0 \end{aligned}$

D'où $\boxed{J \in E}$**.**

15.1) $\theta \to \dfrac{1}{x^2+\cos^2\theta}$ **est** π**-périodique et paire. D'où :**

$$\boxed{I(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{x^2+\cos^2\theta}\ d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^2+\cos^2\theta}\ d\theta}$$

15.2) Dans l'intégrale proposée, posons $\theta = \arctan u$**. Cela est possible car** $\arctan$ **est un difféomorphisme de** $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ **sur** $\mathbb{R}^{+*}$**. On obtient :**

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^2+\cos^2\theta} &= \int_0^{+\infty} \frac{\dfrac{du}{1+u^2}}{x^2+\dfrac{1}{1+u^2}} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2x^2+1+x^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+\left(\dfrac{ux}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} \qquad . \\
&= \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\int_0^{+\infty} \frac{\dfrac{xdu}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\left(\dfrac{ux}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\left[\arctan\left(\frac{ux}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^2+\cos^2\theta} = \frac{\pi}{2x\sqrt{1+x^2}} \ \textbf{ et } I(x) = \frac{\pi}{x\sqrt{1+x^2}}}$$

16) La transformée de Laplace de J **s'exprime, pour** $x>0$ **par :**

$\mathcal{L}(J)(x = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\ \cos\theta)d\theta\right)e^{-xt}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{+\infty}\cos(t\ \cos\theta)e^{-xt}\right)d\theta$

Or, en posant $a=\cos\theta$**,**

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\cos(at)e^{-xt}dt &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{t(ia-x)}+e^{-t(ia+x)}}{2}\ dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{t(ia-x)}}{ia-x}-\frac{e^{-t(ia+x)}}{ia+x}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-ia}-\frac{1}{x+ia}\right) \\
&= \frac{x}{x^2+a^2} \\
&= \frac{x}{x^2+\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

D'où : $\mathcal{L}(J)(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x}{x^2+\cos^2\theta}d\theta = \frac{x}{\pi}\times\frac{\pi}{x\sqrt{1+x^2}}$ **(d'après 15.2)** $= \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$**.**

On a montré : $\forall x>0,\ \mathcal{L}(J)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Fin
à la prochaine