

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَعَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ الْمُتَوَكِّلُونَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

Devoir Libre (07-08) : Intégration sur un segment

PROBLÈME. Extrait de l'épreuve Agro 2006.

Dans ce problème, a est un réel strictement positif et f désigne une fonction de la variable réelle définie sur l'intervalle $[0, a]$, à valeurs réelles, continue et strictement croissante sur $[0, a]$, dérivable dans l'intervalle $]0, a[$ et s'annulant en zéro. La fonction f est alors bijective de $[0, a]$ dans $[0, f(a)]$ et admet une réciproque, notée g .

La fonction g est caractérisée par

$$\forall x \in [0, a], \forall y \in [0, f(a)], y = f(x) \iff x = g(y).$$

On remarquera que g est continue sur l'intervalle $[0, f(a)]$ et strictement croissante sur cet intervalle.

1.1. Dans les deux premières questions, on montre que pour tout réel α tel que $0 \leq \alpha \leq a$:

$$(1) \int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy = \alpha f(\alpha).$$

1.1.1. Justifier que l'on a $g(0) = 0$.

1.1.2. Exemple : on prend $f(x) = x^p$ avec p réel strictement positif ; vérifier la relation (1).

1.2. Pour tout α réel vérifiant $0 \leq \alpha \leq a$, on note $\varphi(\alpha)$ la quantité :

$$\varphi(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy - \alpha f(\alpha).$$

1.2.1. Exprimer la fonction φ l'aide de f et de primitives de f et g .

1.2.2. Dduire du 1.2.1. que la fonction φ ainsi définie est continue sur $[0, a]$.

1.2.3. Montrer que φ est dérivable sur $]0, a[$, de dérivée nulle sur $]0, a[$ et en dduire que φ est constante sur $[0, a]$.

1.2.4. Vérifier que $\varphi(0) = 0$ et en déduire l'égalité (1).

2.1 Dans cette question, on applique la formule précédente au calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx$.

2.1.1. Soit $P(x) = x^4 + 1$. Montrer que $P(x) = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$.

Pour la suite du problème, on admettra l'identité :

$$\frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right).$$

2.1.2. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx.$$

Indication : on utilisera un changement de variable.

2.1.3. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(3 - 2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{8} \pi.$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = x\sqrt{2} - 1$ ainsi que la formule valable pour tout réel x , strictement positif :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2.2. Dans cette question, f_0 désigne la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f_0(x) = \sqrt{\tan(x)}$.

2.2.1. Montrer que f_0 est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{4}[$. Justifier l'existence de la fonction f_0^{-1} et donner l'expression de cette fonction réciproque.

2.2.2. Calculer $\int_0^1 \text{Arctan}(y^2) dy$ par intégration par parties.

2.2.3. En utilisant (1) et **2.2.2.**, donner la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)} dx$.

3. Dans cette question, on revient au cas général.

α désigne un réel vérifiant $0 \leq \alpha \leq a$, et β un réel vérifiant $0 \leq \beta \leq f(a)$.

3.1. Montrer, en distinguant deux cas selon la position relative de β et de $f(\alpha)$ que

$$\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y) dy \geq \alpha(\beta - f(\alpha))$$

puis que

$$(2) \quad \alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_0^{\beta} g(y) dy.$$

3.2. Etudier dans l'intervalle $[0, f(a)]$ les variations de la fonction définie par

$$\forall t \in [0, f(a)], h(t) = \alpha t - \int_0^t g(y) dy.$$

Calculer la valeur de son maximum et retrouver ainsi la formule (2).

Fin