CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DL 18 (08-09): *Intégration sur un segment*

25 avril 2009

Blague du jour :
Deux petits moineaux sont perchés sur un fil télégraphique. Tout d'un coup, l'un d'eux fait : Hi ! Hi ! Hi ! Hi !
- Qu'est-ce qui t'arrive ? Je n'ai rien dit de drôle !
- Mais non, c'est un télégramme qui me chatouille.

Mathématicien du jour — ***Stirling***
James Stirling (1692-1770) est un mathématicien écossais découvert par Newton, était trés ami avec de Moivre, Cramer et Euler. Il résolva le problème des trajectoires orthogonales. Il donne également un théorème à propos de la convergence d'un produit infini. Son équivalent asymptotique de $n!$ est le plus connu.

PROBLÉME : — **Source : DL, TSI Sup, Pr Ahrar, Mohammedia**

Partie 1 Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$ et $I'_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = I'_n$.
2) Pour $n \geq 2$, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
3) Calculer I_{2n} et I_{2n+1}.
4) Vérifier que $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ et en déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
5) Calculer $I_{2n}I_{2n+1}$ et en déduire que : $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie 2 Série de Riemann

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)dt$; $J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)dt$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad W_n > 0$ et $(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$.
b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
$\forall n \in \mathbb{N} \quad J_{n+1} - J_n = \frac{-1}{2n+1} J_{n+1} - \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^{2n+1}(t)dt$
c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :
(i) $J_{n+1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{n+1}$.
(ii) $\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = -\frac{2}{(2n+2)^2}$.
d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = 2\left(\frac{J_0}{W_0} - \frac{J_n}{W_n}\right)$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$.

a) Montrer que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$.
b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1}) = \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}$.
c) Conclure que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2\frac{J_0}{W_0} = \frac{\pi^2}{6}$.
d) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S'_{2n+1} = S_{2n+1} - \frac{1}{2} S_n$.
e) En déduire que la suite $(S'_n)_{n\geq 1}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie 3 Formule de Stirling

On se propose dans cette partie de trouver un équivalent simple de $n!$.

On rappelle que deux suites réelles $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont dites équivalentes s'il existe une suite réelle $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ convergente vers 1 et un entier $N \geq 1$ telles que :

$$\forall n \geq N \quad x_n = \varepsilon_n y_n.$$

1) Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites de $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $n \geq 1$ on pose : $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

a) Montrer que si les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont équivalentes alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n$ pour tout entier $n \geq N$.

b) En déduire que si les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont équivalentes, alors les suites $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ sont de même nature. (càd : convergent ou divergent simultanément).

c) Justifier que b) reste vrai si on change l'hypothèse $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites de $\mathbb{R}^+$ par $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont positifs à partir d'un certain rang.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(n!) - (n + \frac{1}{2}) \ln(n) + n$; $v_n = u_{n+1} - u_n$; $w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = u_{n+1} - 1$.

a) Montrer que $v_n \sim \frac{-1}{12n^2}$. (Faire un développement limité)

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente. (On commencera par utiliser la partie 2 pour montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est convergente).

c) Pour tout entier $n \geq 1$ on pose : $\alpha_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$

Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers une constante réelle α.

d) Utiliser la partie 1 pour calculer la valeur de α.

e) Déduire finalement la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

Partie 4 **Une application de la formule de Taylor Lagrange**.

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall q \in \mathbb{N}^* \quad \left| \ln(1+x) - \sum_{p=1}^{q} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p} \right| \leq \frac{x^{q+1}}{q+1}$.

2) Soit x un réel donné dans $[0,1]$, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ on pose : $A_q(x) = \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^{p-1}}{p} x^p$.

Montrer que $\lim_{q\to\infty} A_q(x) = \ln(1+x)$.

3) Soit $\varphi :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

a) Montrer que φ se prolonge par continuité sur $[0,1]$ en une fonction qui sera encore notée φ.

b) Montrer que pour tout $x \in]0,1] \quad \left| \varphi(x) - \sum_{p=1}^{q} (-1)^{p-1} \frac{x^{p-1}}{p} \right| \leq \frac{x^q}{q+1} \leq \frac{1}{q+1}$.

c) En déduire que $\left| \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \right| \leq \frac{1}{q+1}$.

d) En déduire que $\int_0^1 \varphi(x)dx = \frac{\pi^2}{12}$. (Utiliser la partie 2)

4) Soient n un entier naturel fixé.

a) Montrer que $\forall q \in \mathbb{N}^* \quad \left| \int_0^1 \ln(1+x^n)dx - \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^{p-1}}{p(np+1)} \right| \leq \frac{1}{q+1}$.

b) En déduire que $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = T(n) = \lim_{q\to\infty} T_q(n)$ où $\forall q \in \mathbb{N}^* \quad T_q(n) = \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^{p-1}}{p(np+1)}$.

c) On rappelle que $\lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| nT(n) - \frac{\pi^2}{12} \right| \leq \frac{\pi^2}{6n}$.

d) Conclure que : $T(n) = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx \sim \frac{\pi^2}{12n}$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère : $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad T(n) = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \ln(2) - n + nu_n$.

c) En déduire que : $u_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + \circ(\frac{1}{n^2})$.

Fin
à la prochaine