Corrigé DL 18

Integration sur un segment

Partie 1

1) faire un chgt de variable $t' = \pi/2 - t$ ds I_n

2) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \int_0^{\pi/2} (-\cos t)' (\sin t)^{n-1} dt = \left[-\cos t \sin^{n-1} t\right] + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^{n-2} t$

$= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^{n-2} t \, dt = (I_{n-2} - I_n)(n-1)$

d'où $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$

3) $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \frac{(2n-1)(2n-3) \cdots 1}{2n(2n-2) \cdots 2} I_0$ $= \pi/2$

$\boxed{I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \pi/2}$ (on multiplie en haut et en bas par $2n(2n-2) \cdots 2$)

$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{1} I_1$ $= 1$

$\boxed{I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$

4) $0 \leq \cos t \leq 1$ donc $\cos^{n+2} \leq \cos^{n+1} \leq \cos^n$ puis on intègre

$\frac{n+1}{n+2} = \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ puis on passe à la limite

5) $I_{2n} I_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$ d'après 3

or $I_{2n} \sim I_{2n+1}$ d'où $I_{2n}^2 \sim \frac{\pi}{4n+2} \sim \frac{\pi}{4n}$

d'où $I_{2n+1} \sim I_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ d'où $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Partie 2

1) a) $t \longmapsto \cos^{2n} t$ est continue positive non nulle sur $[0, \pi/2]$ donc d'intégrale strict positif

$(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$ d'après Partie 1, qst 2 et $W_n = J_{2n}$

b) $$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t(\cos^2 t - 1)\,dt = -\int_0^{\pi/2} \underbrace{t^2 \sin t}_{v}\,(\underbrace{\sin t \cos^{2n} t}_{u'})\,dt$$

$$= \left[t^2 \sin t \frac{\cos^{2n+1} t}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2n+1}\left(\int_0^{\pi/2} 2t \sin t \cos^{2n+1} t + \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n+2} t\,dt\right)$$

$$= -\frac{2}{2n+1}\left(\int_0^{\pi/2} 2t \sin t \cos^{2n+1} t + J_{n+1}\right)$$

c) i) $$J_{n+1}\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) - J_n = \frac{-2}{2n+1}\int_0^{\pi/2} \underbrace{t}_{v}\,\underbrace{\sin t \cos^{2n+1} t}_{u'}\,dt$$

$$= -\frac{2}{2n+1}\left(\left[-t \frac{\cos^{2n+2} t}{2n+2}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n+2} t}{2n+2}\,dt\right)$$

d'où

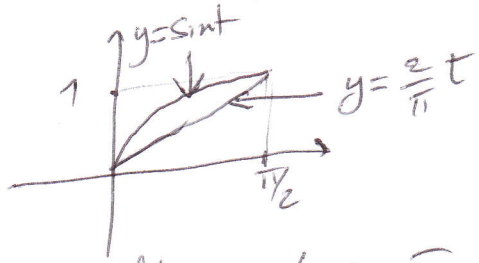
$$\boxed{J_{n+1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{n+1}}$$

ii) $$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{\underbrace{W_{n+1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)}_{W_n}} = \frac{-2}{(2n+2)^2}$$

d) $$\frac{1}{p^2} = 2\left(\frac{J_p}{W_p} - \frac{J_{p-1}}{W_{p-1}}\right)$$ d'après (ii)

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = 2\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{J_p}{W_p} - \frac{J_{p-1}}{W_{p-1}}\right) = 2\left(\frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0}\right)$$

2) a) $t \longmapsto \sin t$ est concave sur $[0, \pi/2]$ donc en dessous de sa corde



$\frac{2}{\pi} t \leq \sin t$ d'où $t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$

b) $t \longmapsto t^2 \cos^{2n} t$ est cont positive non nulle sur $(0, \pi/2)$

donc $J_n > 0$, or $t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$ d'où

$$J_n \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{2n} t = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^{2n} t$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t - \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2} t \right) = \frac{\pi^2}{4} (W_n - W_{n+1})$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \left(W_n - \frac{2n+1}{2n+2} W_n \right) = \frac{\pi^2}{8} \frac{W_n}{n+1}$$

c) $0 < \frac{J_n}{W_n} < \frac{\pi^2}{8(n+1)} \longrightarrow 0$ donc $S_n = 2\left(\frac{J_0}{W_0} - \frac{J_n}{W_n} \right) \to \frac{2 J_0}{W_0}$

$$= 2 \frac{\frac{(\pi/2)^3}{3}}{\pi/2} = \frac{\pi^2}{6}$$

d) $$S'_{2n+1} = \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} = \underbrace{-\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2}}_{p \text{ pair}} + \underbrace{\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}}_{p \text{ impair}}$$

$$S_{2n+1} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$S'_{2n+1} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2} S_n$$

e) $S_n \to \pi^2/6$ et $S_{2n+1} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$

donc $S'_{2n+1} \to \pi^2/6 - \pi^2/12 = \pi^2/12$

et $S'_{2n} = S'_{2n+1} - \frac{1}{(2n+1)^2} \longrightarrow \pi^2/12$ donc $S_n \to \pi^2/12$

Partie 3

1) a) $\varepsilon_n = \varepsilon_n v_n$ tq $\lim \varepsilon_n = 1$ donc $1/2 < \varepsilon_n < 3/2$ à PCR

$\varepsilon = 1/2$

d'où $\frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n$ à PCR

b) $$\frac{1}{2} \sum_{n \geq N} u_n \leq \sum_{n \geq N} u_n \leq \frac{3}{2} \sum_{n \geq N} v_n$$

donc $\sum u_n$ majorée ssi $\sum v_n$ majorée

comme u_n, v_n positif donc

$\sum u_n$ cvge $\Leftrightarrow \sum v_n$ cvge

c) la cvge ou la divgce d'une série ne dépend pas de ses premiers termes

2) a) $$v_n = u_{n+1} - u_n = \underbrace{\ln (n+1)! - \ln n!}_{\ln \frac{(n+1)!}{n!}} - \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln (n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + 1$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\ln (n+1) - \ln n\right) + 1$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 1$$

$$= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{12n^2}$$

b) $\sum -\frac{1}{12k^2}$ cvge donc $\sum_{k=1}^{n-1} v_k = u_n - u_1$ cvge

car $v_k \sim -\frac{1}{12k^2}$

donc $w_n = u_{n+1} - 1$ cvge

c) $\ln \alpha_n = u_n$ donc $\alpha_n = e^{u_n}$ cvge vers $\alpha > 0$

d) $\alpha_n \sim \alpha$ donc $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \alpha \sqrt{n}$

et $(2n)! \sim \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \alpha \sqrt{2n}$

donc $$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \pi/2 \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \alpha \sqrt{2n}}{2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \alpha^2 n} \pi/2 = \frac{\pi}{\alpha \sqrt{2n}}$$

d'autre part $I_{2n} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ donc $\alpha = \sqrt{2\pi}$

e) $n! \sim \alpha\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Partie 4

1) ~~$\frac{1}{1+x}$~~ sait que $\sum_{p=0}^{q-1}(-x)^p = \frac{1+x^q}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{x^q}{1+x}$

donc $\frac{1}{1+t} = \sum_{p=0}^{q-1}(-1)^p t^p = \frac{t^q}{1+t}$

puis on intègre d'où

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{p=0}^{q-1}(-1)^p\frac{x^{p+1}}{p+1}\right| \leq \int_0^x \frac{t^q}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^q = \frac{x^{q+1}}{q+1}$$

faire chgt de variable $p+1 \longrightarrow p$

2) $0 \leq x \leq 1$ $\quad 0 \leq \frac{x^{q+1}}{q+1} \leq \frac{1}{q+1} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$

3) a) $\ln(1+x) = x + o(x)$

b) diviser par x ds (1) puis $0 \leq x \leq 1$

c) Intégrer b)

d) tendre $q \longrightarrow +\infty$ $\quad \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2} = \frac{\pi^2}{12}$

4) a) d'après 1) en remplaçant x par x^n on obtient

$$\left|\ln(1+x^n) - \sum_{p=1}^{q}(-1)^{p-1}\frac{x^{np}}{p}\right| \leq \frac{x^{nq+n}}{q+1} \leq \frac{1}{q+1}$$ puis on intègre

b) $\frac{1}{q+1} \longrightarrow 0$ qd $q \longrightarrow +\infty$

c) $I(n) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p(np+1)}$ et $\frac{\pi^2}{12} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$

d'où $\left|nI_n - \frac{\pi^2}{12}\right| = \left|\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\left(\frac{n}{p(np+1)} - \frac{1}{p^2}\right)\right|$

$$\leq \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2(np+1)} \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6n}$$

car $np+1 \geq n$

5) a) $|u_n - 1| = \left|\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} - 1\right| = \left|\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^n} - 1\right) dx\right| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$

donc $u_n - 1 \longrightarrow 0$

b) $T(n) = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \left[x \ln(1+x^n)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n x^n}{1+x^n} dx$

$= \ln 2 - n \left(\int_0^1 \frac{1+x^n - 1}{1+x^n} dx\right)$

$= \ln 2 - n + n u_n$

c) $T_n \sim \frac{\pi^2}{12n}$ donc $T_n = \frac{\pi^2}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$u_n = \frac{T(n)}{n} - \frac{\ln 2}{n} + 1 = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

FIN