CPGE My Youssef, Rabat

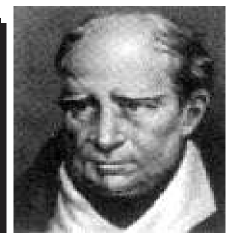
بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DL 22 (08-09): *Groupe symétrique Déterminants*

7 juin 2009

Blague du jour :
• A combien rouliez-vous ? demande le gendarme.
- A deux seulement, mais si vous voulez monter, il reste de la place.
• Quelle est la différence entre un agent de police et une cocotte-minute ?
Il n'y en a pas car pour tous les deux, dès qu'ils sifflent c'est cuit !



Mathématicien du jour — ***Wronski***
Josef Hoëné-Wronski (1778-1853) est un philosophe et scientifique polonais. Il participa à la guerre pour l'indépendance de son pays, fut prisonnier à la bataille et emprisonné pendant 4 années. Il rejoigna la France pour poursuivre ses études. Il parlait le polonais, le français, le latin, le grec, l'hébreu, l'arabe, l'araméen, mais pas l'anglais.
Concernant son travail scientifique, il essaya principalement d'appliquer la philosophie aux mathématiques. Il travailla beaucoup sur les déterminants et mit au point une méthode permettant, pour tout polynôme, d'extraire le polynôme dont toutes les racines sont à l'intérieur du disque unité. On lui doit aussi le wronskien, déterminant d'un système différentielle $Y' = AY$.

EXERCICE :

1) **Montrer que toute permutation dont le support est de cardinal 2 est une transposition.**
2) **Montrer que toute permutation dont le support est de cardinal 3 est une 3-cycle.**
3) **Peut-on généraliser pour une permutation dont le support est de cardinal superieur à 4.**

PROBLÈME I

On définit sur $\mathcal{S}_n$ la relation suivante :
$g\mathcal{R}f \iff$ $i)$ $\exists h \in \mathcal{S}_n$ **tel que** **supp**$(h) \cap$ **supp**$(g) = \emptyset$
$ii)$ **supp**$(f) =$ **supp**$(g) \cup$ **supp**(h) **et** $f = g \circ h$
On dit qu'une permutation f est irréductible quand elle vérifie la propriété suivante : $\forall g \in \mathcal{S}_n, \quad g\mathcal{R}f \Longrightarrow g = f$ **ou** $g = id_{[|1,n|]}$.

1) **Donner supp**$(id_{[|1,n|]})$.
2) **Soit $f \in \mathcal{S}_n$, montrer que : supp**$(f) = \emptyset \iff f = id_{[|1,n|]}$.
En déduire que : $id_{[|1,n|]}$ **est irréductible.**

3) **Donner un exemple d'une permutation irréductible autre que $id_{[|1,n|]}$.**

4) **Soit $(g,h) \in \mathcal{S}_n^2$ tel que supp$(g)\cap$supp$(h) = \emptyset$.**
Montrer que : $\forall i \in [|1,n|], \quad i \in$ supp$(g) \Longleftrightarrow h(i) \in$ supp(g).

5) **Soit $(g,f) \in \mathcal{S}_n^2$ tels que : $g\mathcal{R}f$.**
Montrer que : supp(f)=supp$(g)\cup supp(h)$, où h est la permutation citée dans la définition.

6) **Soit $(h_1,h_2) \in \mathcal{S}_n$ tels que : supp$(h_1)\cap$ supp$(h_2) = \emptyset$.**
Montrer que supp$(h_1 \circ h_2) \subset$ supp$(h_1)\cup$ supp(h_2).

7) **En déduire que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$**

8) **Montrer que : $\forall f \in \mathcal{S}_n \quad \exists p \in \mathbb{N}^*, \exists g_1, g_2, \ldots, g_p$ permutations de $[|1,n|]$ irréductibles, à supports deux à deux disjoints telles que : $f = g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_p$.**

9) **Soit $f \in \mathcal{S}_n$ irréductible, montre que f est un cycle.**
Étudier la réciproque.

10) **A quel notions connues sur $\mathbb{N}$ ressemblent la relation $\mathcal{R}$ et les permutations irréductibles.**

PROBLÈME II — *Autour de la Comatrice.*

---

1) **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.**
   a) **On suppose que A est inversible.**
   Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, associé à A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, on pose $F_k = Vect(e_1, \cdots, e_k)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.
      i. **Montrer que $f(F_k) = F_k$.**
      ii. **En déduire que $f^{-1}(F_k) = F_k$.**
      iii. **En déduire que A^{-1} est triangulaire supérieure.**
      iv. **En déduire que $com(A)$ est triangulaire inférieure.**
   b) **On suppose que A est non inversible.**
   Soit $\alpha = \min\{|\lambda|$ tel que λ valeur propre non nulle de $A\}$
      i. **Montrer que $\forall 0 < \varepsilon < \alpha$, on a $A - \varepsilon I_n$, non inversible.**
      ii. **En déduire que $com(A)$ est triangulaire inférieure.**

2) **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier le rang de com$(A)$ en fonction du rang de A. Montrer que :**
   rg(com$(A)) = n$ si rg$(A) = n$
   rg(com$(A)) = 1$ si rg$(A) = n-1$
   rg(com$(A)) = 0$ si rg$(A) \leq n-2$

3) **Calculer com (com A) dans le cas où A est inversible.**

4) **Si rg$A \leq n-2$, démontrer que com $A = 0$.**

5) **Si rg$A = n-1$, montrer que com $A = U^tV$, où $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.**

6) **Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**
   a) **Calculer com (I_n) et com (λA).**
   b) **Si A et B sont inversibles, démontrer que**
   com $(AB) =$ (com A)(com B) et com $(A^{-1}) =$ com $(A)^{-1}$.
   c) **Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant les scalaires λ tels que $A - \lambda I$ et $B - \lambda I$ soient inversibles.**
   d) **En déduire que si A et B sont semblables, alors com A et com B le sont.**

Fin
à la prochaine