.

# DL 8 Bis
# Intégration sur un segment

## 0.1. <u>Problème I</u> – Etude de séries dont le terme général est le reste d'une série convergente..

*Source : Concours commun français 2004, Niveau DEUG*

Soit $n_0$ un entier naturel fixé. On dit que $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ une série convergente si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ est finie, on note alors $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ sa sa limie qu'on appelle somme de la série. On définit pour $n$ entier naturel supérieur ou égal à $n_0$ , $r_n$ son reste de rang $n$ : $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq n_0} r_n$ dans trois exemples différents.

**<u>Exemple 1</u>**

1. On pose pour $n\geq 0$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.

   Calculer $r_n$ puis montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} r_n$ converge et calculer sa somme.

**<u>Exemple 2</u>**

2. On pose pour $n\geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.

   Nous allons chercher un équivalent de $(r_n)$.

   Soit $k$ un entier supérieur ou égal à 1.

   (a) Montrer que $\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{(k+1)^2}\leq\dfrac{1}{t^2}\leq\dfrac{1}{k^2}$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel non nul $n$ et pour tout entier $N$ supérieur à 2 et à $n+1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel non nul $n$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

(d) Donner alors un équivalent de $(r_n)$ lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$.
Que peut-on en conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} r_n$ ?

**Exemple 3**

On pose pour $n\geq 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3. Justifier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$.
4. Expression intégrale de $r_n$.
   Soit $n$ un entier naturel non nul. On définit la suite $(I_n)$ par $I_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
   (b) Montrer que $I_n = \ln 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On pourra calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, puis exprimer $r_n$ en fonction de $I_n$.
5. Conclusion
   (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a :
   $I_n = \dfrac{(-1)^n}{a(n+1)} + \dfrac{1}{n^\alpha}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$ sont à déterminer.
   (b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} r_n$.

## 0.2. PROBLEME II. Nombre premiers inférieurs à un réel donne.

Source : Concours 2004. ISFA

Soit $\{p_k \text{ tel que} : k \in \mathbb{K}^*\}$ la suite des entiers premiers ordonnés par valeurs croissantes. (On rappelle qu ?un entier premier a exactement deux diviseurs distincts 1 et lui-même). Pour $x$ et $y$ réels positifsavec $x > y$ on note :

$$P(x,y) = \begin{array}{l} 1 \text{ si } \{i \text{ tel que} : x \leq p_i < y\} = \emptyset \\ \displaystyle\prod_{x \leq p_i < y} p_i \end{array}$$

On note aussi : $K(x) = P(x, 0)$.

**PARTIE A** : *fonction majorante de la fonction $K$.*

1- Donner $p_1, p_2$ et $p_3$ et l ?expression de $K(x)$ pour x réel positif inférieur ou égal à 6. Donner les points de discontinuités de la fonction $K$.

2- Montrer pour $0 \leq z \leq y \leq x$ la relation : $P(x, z) = P(x, y)P(y, z)$.

3- Soit $n$ un entier pair supérieur ou égal à 2. On pose $n = 2m$.

(i) Montrer que l ?entier $P(2m+1, m+1)$ divise l ?entier $\mathcal{C}_{2m+1}^m$ (nombre de combinaisons de $m$ objets pris dans $2m+1$ objets. (On pourra remarquer que chaque entier premier du produit $P(2m+1, m+1)$ divise $\mathcal{C}_{2m+1}^m$).

(ii) En déduire la majoration $P(2m + 1, m + 1) \leq \mathcal{C}_{2m+1}^m \leq 2^{2m}$.

4- On note $[x]$ la partie entière de $x$. Déduire de la question 3 la majoration : $K(x) \leq 4^{[x]}$.

**PARTIE B** : *fonction majorante du nombre d ?entiers premiers inférieurs à un réel $x$.*

On note $N$ la fonction définie par : $N(x) =$ nombre d ?entiers premiers inférieurs ou égaux à $x$.

Pour $x \geq 2$ on note $S(x)$ la fonction définie par $S(x) = \ln(K(x))$.

1- Déduire de la partie A un majorant de $S(x)$.

2- Soit $f$ une fonction définie sur $[2, +\infty[$ à valeurs réelles, dérivable et à dérivée continue.

(i) Montrer que pour $k$ entier on a :

$$\int_2^{p_k} S(t)f'(t)dt = -\sum_{i=1}^{k} \ln p_i f(p_i) + S(p_k)f(p_k)$$

(ii) Déduire pour tout réel $x$ supérieur ou égal à 2 la relation :

$$\sum_{i=1}^{[x]} \ln p_i f(p_i) = S(x)f(x) - \int_2^x S(t)f'(t)dt$$

3- On prend pour fonction $f$ la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

Déduire du 2 l ?inégalité : $N(x) \leq 2\ln 2 \left( \dfrac{x}{\ln x} + \displaystyle\int_2^x \dfrac{dt}{(\ln t)^2} \right)$.

4- Majoration de l ?intégrale : $\displaystyle\int_2^x \dfrac{dt}{(\ln t)^2}$ :

(i) Etudier sur l ?intervalle $[\ln 2, +\infty[$ la fonction $u \mapsto \dfrac{e^u}{u^2}$. Montrer qu ?il existe un unique réel (noté $u_0$ ) strictement supérieur à $\ln 2$ tel que $\dfrac{e^{u_0}}{u_0^2} = \dfrac{2}{(\ln 2)^2}$ .

(ii) En déduire :

$$\int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{e^u}{u^2} du \leq \frac{x}{(\ln x)^2}(\ln x - \ln 2)$$

(i) Déduire alors une majoration de $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}$.

5- Déduire que, pour $x$ supérieur à $e^{u_0}$ l'inégalité : $N(x) \leq 4\ln 2 \dfrac{x}{\ln x}$.

FIN DE L'ÉNONCÉ