Lundi 19 Mars 2007

Durée: 4 heures.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

PROBLÉME I. Puissances itérées d'un endomorphismes.

Vocabulaire et notations.

- Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-ev, de dimension finie égale à n, et f un endomorphisme de E.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_E$.
- Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} \lambda_k X^k$, on pose $P(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} \lambda_k f^k$.
  Par exemple, si $P(X) = X^2 + 2X - 3$, alors $P(f) = f^2 + 2f - 3\,\mathrm{id}_E$.
- On pose $\mathbb{R}[f] = \{P(f) \text{ tel que : } P \in \mathbb{R}[X]\}$.
- f est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, l'indice de nilpotence de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$.

Partie I : Calcul des puissances itérées d'un endomorphisme.

On suppose dans cette partie que $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{id}_E$ et que f n'est pas une homothétie.

1) Soit $k \in \mathbb{N}$,donner le reste de la division euclidienne de X^k par X^2-3X+2

2) En déduire l'existence et l'unicité de $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f^k = a_k f + b_k\,\mathrm{id}_E, \forall k \in \mathbb{N}$.

3) Montrer que $\mathbb{R}[f] = Vect(\,\mathrm{id}_E, f)$, en déduire sa dimension.

4) Montrer que f est inversible et écrire f^{-1} en fonction de f et id_E.

5) Déterminer $(f^{-1})^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

6) Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$.

Partie II : Étude des propriétés d'un endomorphisme nilpotent.

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence p, donc $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

1) Soit $x \in E$ tel que : $f^{p-1}(x) \neq 0$.
Montrer que la famille $\left(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre.

2) En déduire que $p \leq n$ et que $f^n = 0$.

3) Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leq n - 1$.

4) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f \circ g = g \circ f$.

a) Montrer que $f \circ g$ est nilpotent.

b) Montrer que $\mathrm{id}_E - f$ est bijective et déterminer son inverse.

c) On suppose de plus g inversible, montrer que $f + g$ est inversible.

5) On suppose dans cette question que $p = n$.

a) Justifier l'existence d'un $x \in E$ tel que : $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit base de E.

b) Soit $g \in \mathcal{C}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que : } f \circ h = h \circ f\}$.

i. Montrer que $\exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $g(x) = P(f)(x)$.

ii. En déduire que $g(f^k(x)) = P(f)(f^k(x)), \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$, puis que $g = P(f)$.

iii. Montrer que $\mathcal{C}(f) = Vect(id_E, f, \ldots, f^{n-1})$, puis determiner $\dim \mathcal{C}(f)$.

PROBLÉME II. Calcul d'une intégrale généralisée.

Les deux parties sont largement indépendantes.

Partie I : Sommes de Riemann et applications.

1) Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^+)$, montrer que :

$$\exists c \in [a,b] \text{ tel que : } \int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt \text{ Formule de la moyenne.}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2(nx)}dx$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2(t)}dt$.

b) Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2+u^2}du$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe et est finie, qu'on notera λ, citer le théorème utilisé. Déterminer ensuite λ.

c) Montrer que $I_n = 2\lambda$.

3) Soit $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$J_n = \int_0^\pi \frac{f(x)}{1+\cos^2(nx)}dx$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+\cos^2(t)}dt$

b) En utilisant la formule de la moyenne montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$\forall k \in [|0, n-1|]$, $\exists c_k \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$ tel que :

$$J_n = \frac{2\lambda}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)$$

c) En déduire que J_n converge et préciser sa limite.

Partie II. Étude de $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

Pour tout réel t, et tout entier $n \geq 1$, on pose :
$S_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$ et $\Sigma_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kt)$.

1) a) Calculer $S_n(t) + i\Sigma_n(t)$.

b) En déduire alors $S_n(t)$.

c) En déduire la valeur de $\int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$

2) Démontrer que la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(0) = 0$$
$$f(t) = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \quad \text{si } t \neq 0$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

3) a) Montrer l'égalité
$$\int_0^\pi f(t) \sin(n + \frac{1}{2})t \, dt = \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos(n + \frac{1}{2})t \, dt$$

b) En déduire que la suite $\int_0^\pi f(t) \sin(n + \frac{1}{2})t \, dt$ converge vers 0.

4) a) Justifier pour $x > 0$, l'égalité :
$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1 - \cos x}{x} + \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

b) En utilisant la convexité de la foncion $t \mapsto -\sin t$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, montrer que $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1 \quad \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

c) Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ est croissante majorée sur $[0, +\infty[$, en déduire l'existence dans $\mathbb{R}$ de $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, qu'on notera $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

5) Montrer en le justifiant avec soin que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

6) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

Fin.