.

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé DS 7 (07-08) : *Intégration sur un segment* *Équations différentielles*

EXERCICES

Vus en TD.

PREMIER PROBLÈME

Première partie

1) a) $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geq 0$, donc (S_n) est croissante.

b) $$k \leq t \leq k+1 \Longrightarrow \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{(k+1)^2} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}\mathrm{dt} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{dt} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2}\mathrm{dt} = \frac{1}{k^2}$$

c) D'aprés la question précédente on a :
$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{dt} = 1 + \int_1^n \frac{1}{t^2}\mathrm{dt}$$

d) D'aprés la question précédente on a : $S_n \leq 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{1}{t^2}\mathrm{dt} = 1 + \left[-\frac{1}{n}\right]_1^n = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$, donc (S_n) est majorée or elle est croissante donc converge vers une limite finie l

2) a) D'aprés 1.b) moyennant un changement de variable on en déduit que $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}$, donc $\displaystyle\int_{n+1}^{n+p+1}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt} = \sum_{k=n+1}^{n+p}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt} = \int_n^{n+p}\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}$, d'aprés l'inégalité précédente on a, aprés intégration : $\displaystyle\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \leq S_{n+p} - S_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$, quand $p \longrightarrow +\infty$ avec n fixé on obtient $\displaystyle\frac{1}{n+1} \leq l - S_n \leq \frac{1}{n}$.

b) $S_4 = 1 + \dfrac{61}{144} = 0.7986$ donc $1.62 = \dfrac{1}{5} + S_4 \leq l\dfrac{1}{4} + S_4 = 1.67$

Deuxième partie

1) a)
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{(ct^2+dt)}_{u}\underbrace{\cos(k\pi t)}_{v'}\,\mathrm{dt} &= \frac{1}{k\pi}\underbrace{\left[(ct^2+dt)\sin(k\pi t)\right]_0^1}_{\text{nul}} - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \underbrace{(2ct+d)}_{u}\underbrace{\sin(k\pi t)}_{v'}\,\mathrm{dt}\\
&= \frac{1}{k^2\pi^2}\left[(2ct+d)\cos(k\pi t)\right]_0^1 - \frac{2c}{k^2\pi^2}\int_0^1\cos(k\pi t)\mathrm{dt}\\
&= \frac{(2c+d)(-1)^k - d}{k^2\pi^2} - \frac{2c}{k^3\pi^3}\underbrace{\left[\sin(k\pi t)\right]_0^1}_{\text{nul}}
\end{aligned}$$

b) Il suffit de choisir a, b réels tels que : $(2a+b)(-1)^k - d = \pi^2$, autrement dit solutions du système suivant : $\left\{\begin{array}{l} 2a = \pi^2 \\ -2a-2b = \pi^2 \end{array}\right.$, donc $a = \dfrac{\pi^2}{2}$ et $b = -\pi^2$.

c)
$$\begin{aligned}
\int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)\mathrm{dt} &= \frac{1}{2}\int_0^1(at^2+bt)\mathrm{dt} + \sum_{k=1}^{n}\int_0^1(at^2+bt)\cos(k\pi t)\mathrm{dt}\\
&= \frac{2a+3b}{12} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{2a+3b}{12} + S_n
\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}
1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta) &= \mathcal{R}e\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{2ik\theta}\right)\\
&= \mathcal{R}e\left(1+2\mathrm{e}^{2i\theta}\frac{1-\mathrm{e}^{2in\theta}}{1-\mathrm{e}^{2i\theta}}\right) && \text{(somme d'une suite géométrique)}\\
&= \mathcal{R}e\left(1+2\mathrm{e}^{2i\theta}\frac{-2i\sin(n\theta)\mathrm{e}^{in\theta}}{-2i\sin(\theta)\mathrm{e}^{i\theta}}\right) && (1-\mathrm{e}^{2i\alpha} = -2i\sin(\alpha)\mathrm{e}^{i\alpha})\\
&= \mathcal{R}e\left(1+2\frac{\sin(n\theta)\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{\sin(\theta)}\right)\\
&= 1+2\frac{\sin(n\theta)\cos((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\\
&= \frac{\sin(\theta)+2\sin(n\theta)\cos((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\\
&= \frac{\sin((2n+1)\theta))}{\sin(\theta)} && (2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b))
\end{aligned}$$

3) a) Simple intégration par parties avec $u = f(t), v' = \sin(\lambda t)$.

b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc f et f' sont bronée sur $[0,1]$, d'autre part $|\cos(\lambda t)| \leq 1$, donc d'aprés la formule précédente on conclut que : $\left|\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{M}{\lambda} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Troisième partie

1) a) f est continue sur $]0,1]$ en tant que rapport de fonctions continues, d'autre part au voisinage de 0, on a $\sin t \underset{0}{\sim} t$, donc $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi(t-2)}{2} \longrightarrow -\pi = f(0)$, donc f est continue en 0.

b) f est dérivable sur $]0,1]$ en tant que rapport de fonctions continues.
En Maple© les calculs donnent :

```
> f:=t->(pi^2*(t^2-2*t))/(4*sin(pi*t/2));
```

$$f := t \mapsto 1/4\,\frac{\pi^2\left(t^2-2\,t\right)}{\sin(1/2\,\pi\,t)}$$

```
> D(f);
```

$$t \mapsto 1/4\,\frac{\pi^2(2\,t-2)}{\sin(1/2\,\pi\,t)} - 1/8\,\frac{\pi^3\left(t^2-2\,t\right)\cos(1/2\,\pi\,t)}{(\sin(1/2\,\pi\,t))^2}$$

```
> limit(D(f)(t),t=0);
```

$$\pi/2$$

c) D'aprés le TAF $\dfrac{f(t)-f(0)}{t} = f'(c) \xrightarrow[0]{} \dfrac{\pi}{2}$, donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

d) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ en tant que rapport de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, de plus $\lim\limits_{0} f'(t) = f'(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

2) On sait d'aprés Partie II, 1,a) que $a = \dfrac{\pi^2}{2}$ et $b = -\pi^2$, puis en prenant $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ dans Partie II, 2) on trouve que $(at^2+bt)\left(\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right) = f(t)\sin(2n+1)\frac{\pi t}{2}$.

3) D'aprés Partie II, 1,c) on a $S_n = \displaystyle\int_0^1 (at^2+bt)\left(\dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)\mathrm{d}t - \dfrac{2a+3b}{6}$, au passage à la limite et d'aprés Partie II, 3, b) on conclut que $l = -\dfrac{2a+3b}{6} = \dfrac{\pi^2}{6}$. En Maple© les calculs donnent :

```
> evalf(Pi^2/6);
```

$$1.64$$

SECOND PROBLÈME

Première partie

1) L'équation caréctéristique de l'équation différentielle $y“+y=0$ est $r^2+1=0$ dont les racines sont i et $-i$, donc la forme générale des solutions est $y_H(x)=A\cos x+B\sin x$, ainsi Σ_0 est un $\mathbb{R}$-ev dont (C,S) est generatrice, comme elle est libre, car non propoprtionnelles, donc c'est une base.

2) a) S_λ est solution de $\Sigma_\lambda \Longleftrightarrow a(\lambda^2+1)=1 \Longleftrightarrow a=\dfrac{1}{\lambda^2+1}$.

b) S_λ est une solution particulière de l'équation avec second membre, donc la forme générale de telles solutions est $y(x)=y_H(x)+S_\lambda(x)$.

c) Découle immédiatement de la question précédente.

d) $S_\lambda(x)=a\sin(\lambda x)$ est $\dfrac{2k\pi}{\lambda}$-périodique avec $k\in\mathbb{Z}$. Supposons que $E_{\sqrt{2}}$ admet une solution $y(x)=A\cos x+B\sin x+S_{\sqrt{2}}(x)$ est 2π-périodique, donc $S_{\sqrt{2}}(x)$ est aussi 2π-périodique, donc $\exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{2k\pi}{\sqrt{2}}=2\pi$, d'où $k=\sqrt{2}\in\mathbb{Z}$, absurde.

Deuxième partie

1) φ_1 et φ_2 sont dérivables, en tant que primitives de fonctions continues, avec $\varphi_1'(x)=f(x)\cos x$ et $\varphi_2'(x)=f(x)\sin x$.

2) a) Evident, car $\sin(x-t)=\sin x\cos t-\cos x\sin t$.

b) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonctions dérivable, avec

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \varphi_1(x)\cos x+\underbrace{\varphi_1'(x)\sin x-\varphi_2'(x)\cos x}_{\text{nul}}+\varphi_2(x)\sin x\\ &= \varphi_1(x)\cos x+\varphi_2(x)\sin x\end{aligned}$$

c) φ est deux dérivable sur $\mathbb{R}$, car φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonctions dérivable, avec $\varphi''(x)=-\varphi_1(x)\sin x+\underbrace{\varphi_1'(x)\cos x+\varphi_2'(x)\sin x}_{f(x)}+\varphi_2(x)\cos x$,

donc $\varphi“(x)+\varphi(x)=f(x)$, autrement dit φ solution de $\mathcal{E}_f$.

3) Soit g une autre solution de $\mathcal{E}_f$, donc $\varphi“+\varphi=f$ et $g“+g=f$, en faisant la différence on obtient $y“+y=0$ où $y=g-\varphi$. D'aprés partie I, 1) on a : $y(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$, donc $g(x)=y(x)+\varphi(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x+\displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{dt}$

4) a) Plus que évident.

b) D'aprés Partie II, 3) on conclut que $h(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x+\displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{dt}$ et $h(x)=\alpha\cos(x+\pi)+\beta\sin(x+\pi)+\displaystyle\int_0^{x+\pi} f(t)\sin(x+\pi-t)\mathrm{dt}$, en sommant ces égalités, en utilisant la relation de Chasles et les formules $\cos(x+\pi)=-\cos, \sin(x+\pi)=-\sin x$, on obtient $h(x+\pi)+h(x)=\displaystyle\int_x^{x+\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{dt}$. D'autre part $f_1(t)\geq 0$ et $\sin(x-t)\geq 0$ pout $x\leq t\leq x+\pi$.

5) a) i. D'aprés Partie II, 3) on a : $\varphi(x)=g(x)-\alpha\cos x-\beta\sin x$ est 2π-périodique en tant que somme de fonctions périodiques.

ii. φ est 2π-périodique, donc $\varphi(x+2\pi)=\varphi(x)$ pour tout réel x,
d'où $\displaystyle\int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x+2\pi-t)\mathrm{dt} = \int_0^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{dt}$,
d'où $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{dt} + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{dt} = \int_0^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{dt}$. En effectuant le changement de variable $u=t-2\pi$ et vu que f et sin sont 2π-périodiques, on trouve que $\displaystyle\int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{dt} = \int_0^{x} f(u)\sin(x-u)\mathrm{du} = \int_0^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{dt}$, d'où $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{dt}=0$.
Pour tout réel x, on a : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{dt}=0$, donc $\displaystyle\sin x\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\mathrm{dt} - \cos x\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\mathrm{dt}=0$. Pour $x=0$, on trouve $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\mathrm{dt}=0$, pour $x=\dfrac{\pi}{2}$, on trouve $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\mathrm{dt}=0$.

b) Si $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\mathrm{dt} = 0$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{dt} = \sin x\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\mathrm{dt} - \cos x\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\mathrm{dt}=0$, donc φ qui est une solution particulière de $\mathcal{E}_f$ est 2π-périodique, donc (d'aprés Partie II, 3) toute autre solution g de $\mathcal{E}_f$ est 2π-périodique.

c) Si $f(t)=\sin t$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi}\sin^2 t\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2t)\mathrm{dt} = \pi \neq 0$, donc d'aprés la question précédente, $\mathcal{E}_f$ n'admet aucune solution 2π-périodique.

Fin