DS 8 : Intégration sur un segment Algèbre linéaire

CORRIGÉ

PROBLÉME.

1. (a) On a d'abord $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice nulle commute avec F, donc $\mathcal{C} \neq \emptyset$, en plus $\forall (M,N) \in \mathcal{C}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $(M+\lambda N)F = MF + \lambda NF = FM + \lambda FN = F(M+\lambda N)$, d'où $M + \lambda N \in \mathcal{C}$ et par suite, $\mathcal{C}$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Tout calcul fait on a :

$$FM = \begin{pmatrix} ax-bz & ay-bt \\ bx+cz & by+ct \end{pmatrix}, \quad MF = \begin{pmatrix} ax+by & -bx+cy \\ az+bt & -bz+ct \end{pmatrix}$$

   Donc $MF = FM \Leftrightarrow \begin{cases} ax-bz = ax+by \\ ay-bt = -bx+cy \\ bx+cz = az+bt \\ by+ct = -bz+ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ b(x-t) = (c-a)y \end{cases}$

   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ alors $M = \begin{pmatrix} x-t+t & y \\ -y & t-x+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c-a}{b}y+t & y \\ -y & -\frac{c-a}{b}y+x \end{pmatrix}$, d'autre part $uI + vF = \begin{pmatrix} u+va & vb \\ -vb & u+vc \end{pmatrix}$ pour avoir $M = uI + vF$ il suffit de prendre $v = -\frac{y}{b}, u = x + \frac{ay}{b}$

   (d) D'aprés la question précédente (I, F) est une famille génératrice de $\mathcal{C}$, elle est en plus car I et F ne sont pas proportionnelles, donc base de $\mathcal{C}$.

2. (a) On a $F^2 = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & -ab-bc \\ ab+bc & -b^2+c^2 \end{pmatrix}$, d'où $\alpha_2 = a+c, \beta_2 = -ac-b^2$.

   (b) On raisonne par récurrence.
   Pour $n = 0$, prendre $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1$.
   Supposons le resultat vrai pour n et montrons que c'est vrai pour $n+1$. En effet $F^n = \alpha_n F + \beta_n I \implies F^{n+1} = F(\alpha_n F + \beta_n I) = \alpha_n F^2 + \beta_n F = \alpha_n(\alpha_2 F + \beta_2 I) + \beta_n F = (\alpha_n\alpha_2 + \beta_n)F + \alpha_n\beta_2 I$, prendre donc $\alpha_{n+1} = \alpha_n\alpha_2 + \beta_n, \beta_{n+1} = \alpha_n\beta_2$.

   (c) D'aprés la question précédente $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1}\alpha_2 + \beta_{n+1} = \alpha_{n+1}\alpha_2 + \alpha_n\beta_2$, c'est donc une suite récurrente linéaire d'équation caractéristique $r^2 - \alpha_2 r - \beta_2 = 0$ et de déscriminant $\Delta = \alpha_2^2 + 4\beta_2 = (a+c)^2 - 4(ac+b^2)$.

   (d) Dans ce cas $\Delta = 9$ et par suite $\alpha_n = \lambda r^n{}_{+\mu r_2^n}$ où $r_1 = -2, r_2 = 1$ solutions de l'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ et λ et μ sont des constantes qu'on peut trouver à l'aide des conditions initiales $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$.

(e) Dans ce cas $\Delta = 0$ et par suite $\alpha_n = (\lambda + \mu n)r^n$ où $r = 2$ solution double de l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ et λ et μ sont des constantes qu'on peut trouver à l'aide des conditions initiales $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$.

3. (a) Soit $(M, N) \in \mathcal{C}^2$, alors $M = uI + vF, N = u'I + v'F$, d'où $MN = uu'I + (uv' + vu')F + vv'F^2 = uu'I+(uv'+vu')F+vv'(\alpha_2 F+\beta_2 I) = (uu'+vv'beta_2)I+(uv'+vu'+vv'\alpha_2)F \in \mathcal{C}$, ainsi $\mathcal{C}$ est stable pour le produit matriciel.

   (b) Soit $M = uI + vF \in \mathcal{C}$, alors M est inversible si et seulement si $\det(M) = u^2 + (a+c)uv + (ac + b^2)v^2 \neq 0$.

   (c) Toutes les matrices sont inversibles si et seulement si $\forall(u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad u^2 + (a + c)uv + (ac + b^2)v^2 \neq 0$ si et seulement si $(u + \frac{a+c}{2}v)^2 + (ac + b^2 - \frac{(a+c)^2}{4})v^2 \neq 0$ si et seulement si $ac+b^2-\frac{(a+c)^2}{4} > 0$ si et seulement si $4b^2-a^2-c^2+2ac > 0$ si et seulement si $4b^2 > (a-c)^2$.

   (d) Dans le cas où $a = 3, b = -2, c = -2$ on a $16 = 4b^2 < (a - c)^2 = 25$, et avec les notations précédentes $M = uI + vF$ est non inversible si et seulement si u et v solutions de l'équation : $(u + \frac{a+c}{2}v)^2 + (ac + b^2 - \frac{(a+c)^2}{4})v^2 = 0$ c'est à dire $(u - \frac{1}{2}v)^2 - \frac{9}{4}v^2 = 0$ si et seulement si $u - \frac{1}{2}v = -\frac{3}{2}v$ ou $u - \frac{1}{2}v = \frac{3}{2}v$ si et seulement si $u = -v$ ou $u = 2v$, donc toutes les matrices sont inversibles sauf celles de la forme $u(I - F)$ ou $v(2I + F)$, c'est à dire non proportionnelles ni à $I - F$ ni à $2I + F$

4. (a) Il suffit de montrer que Φ est injective si et seulement si F inversible.
   En effet si F inversible alors $M \in \operatorname{Ker}\Phi \implies FM = 0 \implies F^{-1}FM = M = 0 \implies \Phi$ injective.

   Inversement supposons Φ injective, et que F n'est pas inversible donc $\exists X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que : $X \neq 0$ et $FX = 0$, posons $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, on a alors $M \neq 0$ avec $FM = 0$ c'est à dire $M \in \operatorname{Ker}\Phi$, contradiction avec le fait que Φ n'est pas injective, d'où F est inversible.

   (b) $\Phi(I) = F$ et $\Phi(F) = F^2 = \alpha_2 F + \beta_2 I$, d'où $G = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b^2 - ac \\ 1 & a + c \end{pmatrix}$

   (c) Φ diagonalisable si et seulement si G diagonalisable si et seulement si G admet deux valeurs propres distinctes si et seulement si le descriminant de son polynôme caractéristique $X^2 - (a+c)X + b^2 + ac$ est non nul si et seulement si $(a+c)^2 - 4b^2 - 4ac \neq 0$ si et seulement si $(a - c)^2 \neq 4b^2$.

Exercie :

1. (a) On procéde par une intégration par parties à deux reprises, d'où $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin' t \cos^{n-1} dt = [\sin t \cos^{n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^{n-2} dt = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2)t \cos^{n-2} dt = (n-1)w_{n-2} - (n-1)w_n$, d'où la relation :

$$w_n = \frac{n-1}{n} w_{n-2} \qquad (1)$$

(b) D'aprés la formule précédente on a : $\begin{cases} w_{2n} = \frac{2n-1}{2n} w_{2n-2} \\ w_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2} w_{n-2} \\ \vdots \\ w_2 = \frac{1}{2} w_0 \end{cases}$. En faisant le produit termes à termes, on obtient : $w_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{(2n)(2n-2)\dots 2} w_0 = \frac{(2n)!}{((2n)(2n-2)\dots 2)^2} w_0$, (on multiplie par $(2n)(2n-2)\dots 2$ dans le numérateur et le dénominateur) or $(2n)(2n-2)\dots 2 = 2^n n!$ et $w_0 = \frac{\pi}{2}$, d'où la formule finale :

$$w_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \qquad (2)$$

2. (a) Posons $v_n = n w_n w_{n-1}$, alors $\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{n w_n w_{n-1}}{(n-1) w_{n-1} w_{n-2}} = 1$, d'aprés la formule (1), d'où $n w_n w_{n-1} = w_1 w_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \times \frac{\pi}{2} = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

$$n w_n w_{n-1} = \frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

(b) $w_{n+1} \leq w_n$ du fait que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $0 \leq \cos t \leq 1$ et donc $\cos^{n+1} t \leq \cos^n t$.

(c) Puisque (w_n) est décroissante on a : $w_n \leq w_{n-1} \leq w_{n-2}$, on divise l'inégalité par w_n et on d'aprés la formule (1) , on a : $1 \leq \frac{w_{n-1}}{w_n} \leq \frac{n}{n-1}$, au passage à la limite, on obtient : $\lim \frac{w_{n-1}}{w_n} = 1$ et par suite $\lim \frac{w_n}{w_{n+1}} = 1$, et on affirmer maintenant que :

$$w_{n-1} \sim w_n \qquad (4)$$

(d) D'aprés les formules (3) et (4) on a : $\frac{\pi}{2} = n w_n w_{n-1} \sim n w_n^2$, d'où

$$w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \qquad (5)$$

3. La fonction définie sur $]-1,1]$ par $f(t) = |t^n \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}|$ présente une singularité au point $t = -1$, posons alors le changement de variable $u = t+1 \longrightarrow t \longrightarrow -10$, on a donc : $f(t) = f(u-1) \sim_0 \frac{K}{\sqrt{u}}$,où $K = 2^n\sqrt{2}$, or $u \longrightarrow \frac{K}{\sqrt{u}} = Ku^\alpha$ est intégrable sur $]0,2]$, car intégrale de Riemann avec $\alpha = -\frac{1}{2} > -1$, donc f est aussi intégrable sur $]-1,1]$.

4. (a) $\tan\theta = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \implies \tan^2\theta(1+t) = 1-t \implies t = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos^\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$, ainsi $dt = -2\sin 2\theta d\theta$, en plus $-1 \leq t \implies 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, d'où $a_{2p} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \tan\theta (\cos 2\theta)^{2p} dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta (\cos 2\theta)^{2p} dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta)(\cos 2\theta)^{2p} dt =$

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta)^{2p}dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta)^{2p+1}dt)$, or en général $b_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta)^n dt = \int_0^{\pi}(\cos u)^n du = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u^n du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos u^n du = w_n + z_n$, avec $z_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n \cos v^n dv = (-1)^w_n$ à l'aide du changement de variable $v = \pi - u$ donc $b_{2p} = 2w_{2p}, b_{2p+1} = 0, a_{2p} = 4w_{2p}$.

(b) $a_{2p} = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2p-1}(p!)^2}$

(c) $a_{2p} = 4w_{2p} \sim 2\sqrt{\frac{\pi}{p}}$

FIN DU CORRIGÉ