CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
رَبِّي إِشرَح لِي صَدرِي وَ يَسِّر لِي أَمرِي وَ
أَحلُل عُقدَة مِن لِسَانِي يَفقَهُوا قَولِي

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم
سورة طه

DS 8 COMMUN: *Intégration sur un segment* *Polynômes & Fractions rationnelles*

Lundi 11 Mai 2009
Durée : 4 heures

Blague du jour :
Un fils de banquier dit à son père : Papa, prête-moi 20 dhs, mais ne m'en donnes que 10.
Le père demande : Pourquoi, mon garçon ?
Le fils répond : Comme ça tu me devras 10 dhs, je te devrai 10 dhs et nous serons quittes !

Mathématicien du jour — ***Ibn al-Yâsamîn***
Ibn al-Yâsamîn est l'un des premiers mathématiciens du Maroc almohade au 12ème et 13ème siècle. De son nom complet Abû Mohammed 'Abd Allâh Ibn Hajâj al-Fandalâwî al-Ardînî. D'origine berbère, né à Fès, il vécut pendant un certain temps à Séville où il perfectionna sa formation scientifique en mathématiques, avant de retourner au Maroc et de s'installer à Marrakech.
Ses oeuvres connues ne sont pas nombreuses : un poême sur les mathématiques (Urjûza fî l-jabr) et un livre (Talqîh al-afkâr bi rusûm hurûf al-ghubâr)

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- **Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.**
- **L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.**
- **Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.**
- **Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.**
- **Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.**
- **Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.**
- **Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.**
- **Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.**
- **Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.**

Exercice :

Décomposer en élèments simples les fractions rationnelles suivantes :

1) **Dans** $\mathbb{R}(X)$: $F(X)=\dfrac{X^2}{(X^2-1)^2}$.

2) **Dans** $\mathbb{R}(X)$: $F(X)=\dfrac{X}{X^4+1}$.

3) **Dans** $\mathbb{C}(X)$: $F(X)=\dfrac{X^n+1}{X^n-1}$.

Problème 1 : **Source : Pr. Haddou Amar, MPSI, Lycée My Youssef-Rabat.**

On considère les deux suites de polynômes $(P_n)_{n\geq 1}$ et $(Q_n)_{n\geq 1}$ à coefficients réels définies par :

$P_1(X)=X, Q_1(X)=1$.

$\forall n\geq 1; P_{n+1}(X)=P_n(X)+XQ_n(X) \quad , \quad Q_{n+1}(X)=-XP_n(X)+Q_n(X)$.

On note le degré d'un polynôme P par $\deg(P)$ et son coefficient dominant par $C(P)$.

On note ensuite F_n la fraction rationnelle : $F_n(X)=\dfrac{P_n(X)}{Q_n(X)}$

1/ Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles F_1, F_2 et F_3.

2/ Montrer que pour tout entier naturel non nul n, P_n est impair et Q_n est pair.

3/ Montrer que pour tout entier $n\geq 1$:

Si n est pair : $\deg(P_n)=n-1$, $\deg(Q_n)=n$, $C(P_n)=(-1)^{\frac{n}{2}+1}n$ et $C(Q_n)=(-1)^{\frac{n}{2}}$

Si n est impair : $\deg(P_n)=n$, $\deg(Q_n)=n-1$, $C(P_n)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ et $C(Q_n)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}n$

4/ On pose pour $n\geq 1$, $A_n(X)=P_n(X)+iQ_n(X)$ où i est le nombre complexe tel que $i^2=-1$.

Calculer $A_{n+1}(X)$ en fonction de $A_n(X)$.

5.a/ Soit $x\in\mathbb{R}$, justifier qu'il existe un unique $\omega\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\omega)=x$.

5.b/ Calculer $P_n(\tan\omega)$ et $Q_n(\tan\omega)$, en déduire que $F_n(\tan\omega)=\tan(n\omega)$ (utiliser 4/)

6/ Montrer que P_n est scindé et que les racines de P_n sont $x_k=\tan\dfrac{k\pi}{n}$ où k est un entier relatif tel que : $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{k\pi}{n}<\dfrac{\pi}{2}$. Justifier que les racines de P_n sont simples.

7/ Montrer de même que Q_n est scindé à racines simples et que ses racines sont :

$y_k=\tan\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ où k est un entier relatif tel que : $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}<\dfrac{\pi}{2}$.

8/ Soit n un entier supérieur ou égal à 2, Calculer P_n' en fonction de Q_{n-1} et Q_n' en fonction de P_{n-1}.

9/ Décomposer la fraction F_n en éléments simples.

10/ En utilisant la question 4/ donner les expressions explicites de $P_n(X)$ et $Q_n(X)$

Problème 2 : **Source : Concours Marocain, 2008, TSI.**

.

L'usage de la calculatrice est autorisé .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Définitions et notations

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.

Les trois parties du problème sont largement indépendantes ; seul le résultat de la question 2 de la première partie est utile pour la suite.

I. Résultats préliminaires

1. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x+y) = h(x) + h(y)$; on pose

$$H(x) = \int_0^x h(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_0^y h(x+t)\, dt = yh(x) + H(y)$.

   (b) En déduire que , pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $H(x+y) - H(x) - H(y) = yh(x)$.

   (c) Exprimer de même la quantité $xh(y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (d) Justifier alors que, pour tout réel x, $h(x) = xh(1)$

2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue ; pour tout $x \in I$ on pose

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt.$$

   (a) Justifier que F est dérivable sur I et préciser sa dérivée.

   (b) Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient $u : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs dans I. On pose

$$F_1(x) = \int_{x_0}^{v(x)} f(t)\, dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt,\ x \in J.$$

      i. Montrer que F_1 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

      ii. En déduire que F_2 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

      iii. Si de plus u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, justifier que F_1 et F_2 le sont aussi.

3. **Application**

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit (a,b) un couple de réels avec $a < b$. En effectuant un changement de variable, montrer que l'application $G : x \longmapsto \int_a^b g(x+t)\cos t\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x,

$$G'(x) = g(b+x)\cos b - g(a+x)\cos a + \int_a^b g(x+t)\sin t\, dt.$$

II. Étude d'une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt. \tag{1}$$

On suppose de plus que f n'est pas la fonction nulle et on considère un réel a tel que $f(a) \neq 0$.

1. Justifier que $f(0) = 0$.
2. (a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{f(a)} \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\, dt$.
   (b) Montrer alors que f est dérivable et calculer sa dérivée.
   (c) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Montrer que, pour tout couple (x,y) de réels,

$$f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \quad \text{et} \quad f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

4. On pose $\lambda = -\frac{f''(a)}{f(a)}$; déduire de ce qui précède que f est solution de l'équation différentielle

$$z'' + \lambda z = 0. \tag{$\mathcal{E}_\lambda$}$$

5. **Étude de l'équation différentielle** $(\mathcal{E}_\lambda)$
   (a) On suppose que $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$.
      i. Donner la dimension et une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.
      ii. En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A tel que $f(x) = A\sin(\mu x),\ x\in\mathbb{R}$, puis justifier que $A = \frac{2}{\mu}$.
   (b) On suppose que $\lambda < 0$ et on pose $\mu = \sqrt{-\lambda}$.
      i. Donner de même une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.
      ii. En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A' tel que $f(x) = A'\,\mathrm{sh}(\mu x),\ x\in\mathbb{R}$, puis justifier que $A' = \frac{2}{\mu}$.
   (c) Si $\lambda = 0$ montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2x$.
6. Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus vérifient bien l'équation fonctionnelle (1).

III. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1. Justifier que si $x > 0$ et différent de 1 alors x et x^2 sont d'un même côté de 1 sur la droite réelle.

2. En déduire que le domaine de définition de la fonction f, noté D_f, est égal à $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

3. Justifier que la fonction f est dérivable en tout point de son domaine de définition et exprimer sa dérivée en tout point de D_f.

4. (a) Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\ln$ au voisinage de 1.
   (b) Justifier alors que $\dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2} + \underset{x\to 1}{\circ}(1)$.
   (c) En déduire que les fonctions f' et $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ possèdent des limites finies en 1 à préciser.

5. **Étude de f au voisinage de 1**
   (a) Justifier qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que , pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}$, $\left|\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right| \leqslant 3/2$.
   (b) En déduire que, pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}$, $\left|f(x) - \ln(1+x)\right| \leqslant \dfrac{3|x^2-x|}{2}$ puis trouver la limite de f en 1.
   (c) On prolonge f par continuité en 1 et on note encore f la fonction ainsi obtenue. Montrer que cette fonction est dérivable en 1 et préciser sa dérivée. On énoncera le théorème utilisé.

6. **Étude de f au voisinage de 0**
   (a) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{-x}{\ln x}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité à droite en 0.
   (b) On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$ et montrer que f est dérivable à droite en 0 ; quelle est la valeur de $f'(0)$?

7. **Étude de f au voisinage de $+\infty$**
   Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y.

8. Dresser le tableau de variations de f sur $[0,+\infty[$.

9. Montrer que la dérivée de f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

10. Tracer la courbe représentative de f (unité 2 cm).

11. **Calcul d'une intégrale**
    (a) Montrer soigneusement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$ est convergente.
    (b) Montrer que, pour tout couple (x,y) d'éléments de l'intervalle $]0,1[$, $\displaystyle\int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_y^x \frac{u}{\ln u}\,du$ et en déduire que $\displaystyle f(x) - f(y) = \int_x^y \frac{1-t}{\ln t}\,dt$.
    (c) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$.

Fin
Bonne chance