Concours National Commun – Session 2005 – BCPST

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière BCPST, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PREMIER PROBLÈME

Dans ce problème, on considère la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$; l'objet est de montrer qu'elle est convergente et de calculer sa limite.

Première partie

1. (a) Montrer que la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (b) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$.
   (c) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^2}$.
   (d) Montrer alors que la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. *Dans la suite de ce problème, on note ℓ la limite de la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*
2. Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
   (a) Montrer que $\int_{n+1}^{n+p+1} \frac{dt}{t^2} \leqslant S_{n+p} - S_n \leqslant \int_n^{n+p} \frac{dt}{t^2}$ et en déduire que $\frac{1}{n+1} \leqslant \ell - S_n \leqslant \frac{1}{n}$.
   (b) Calculer S_4 et en déduire un encadrement de ℓ par deux nombres ayant chacun deux décimales.

Deuxième partie

1. (a) Si c et d sont deux réels et k un entier naturel non nul, montrer que
$$\int_0^1 (ct^2 + dt)\cos(k\pi t)\, dt = \frac{(2c+d)(-1)^k - d}{k^2\pi^2}.$$
   (b) En déduire qu'il existe un unique couple (a, b) de réels tels que, pour tout entier $k \geqslant 1$,
$$\int_0^1 (at^2 + bt)\cos(k\pi t)\, dt = \frac{1}{k^2}.$$
   (c) Soit n un entier naturel non nul ; calculer la valeur de $\int_0^1 (at^2 + bt)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\pi t)\Big)\, dt$ en fonction de S_n.

2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta) = \frac{\sin\big((2n+1)\theta\big)}{\sin\theta}.$$

3. Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
   (a) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,dt = \frac{f(0) - f(1)\cos\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)\,dt.$
   (b) En déduire que la fonction $\lambda \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

Troisième partie

On considère la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(t) = \frac{\pi^2(t^2 - 2t)}{4\sin(\frac{\pi}{2}t)} \quad \text{si} \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = -\pi.$$

1. (a) Montrer que f est continue sur$[0, 1]$.
   (b) Justifier que f est dérivable sur $]0, 1]$ et que f' possède une limite finie à droite en 0.
   (c) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que f est dérivable en 0.
   (d) Déduire de ce qui précède que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
2. Vérifier que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\quad (at^2 + bt)\Big(\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\pi t)\Big) = f(t)\sin\big((2n+1)\dfrac{\pi t}{2}\big).$
3. En déduire la valeur de ℓ, puis vérifier l'encadrement vu à la question 2.(b) de la première partie.

SECOND PROBLÈME

Dans ce problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.

Si f est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$, on lui associe l'équation différentielle

$$y'' + y = f. \qquad (\mathcal{E}_f)$$

Première partie

Pour tout réel x, on pose $C(x) = \cos x$ et $S(x) = \sin x$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$ et vérifier que l'ensemble Σ_0 de ses solutions est un espace vectoriel réel puis que la famille (C, S) est une base de Σ_0.
2. On note Σ_λ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y = \sin(\lambda x), \qquad (E_\lambda)$$

   où λ est un réel non nul tel que $\lambda^2 \neq 1$.

(a) Montrer qu'il existe un unique réel a, que l'on calculera, tel que la fonction
$$S_\lambda : \ x \longmapsto a\sin(\lambda x)$$
soit un élément de Σ_λ.

(b) Montrer alors que $\Sigma_\lambda = \{\alpha C + \beta S + S_\lambda \quad ; \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

(c) Vérifier que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont toutes 2π-périodiques.

(d) Montrer que la fonction S_λ est périodique et préciser ses périodes puis en déduire que l'équation différentielle $(E_{\sqrt{2}})$ n'a pas de solutions 2π-périodiques.

Deuxième partie

Dans cette partie, on désigne par f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ; pour tout réel x, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$, $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\cos t\,dt$ et $\varphi_2(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\sin t\,dt$.

1. Montrer que φ_1 et φ_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. (a) Montrer que, pour tout réel x, $\quad \varphi(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$.
   (b) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Montrer que φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

3. Soit g une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$; montrer que la fonction $(g-\varphi)$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ et en déduire qu'il existe un unique couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout réel x, on ait $\quad g(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x + \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$.

4. **Application :** Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $h'' + h \geqslant 0$.
   (a) Vérifier que h est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_1})$ où $f_1 = h'' + h$.
   (b) Déduire des questions précédentes que, pour tout réel x,
   $$h(x+\pi) + h(x) = \int_x^{x+\pi} f_1(t)\sin(x-t)\,dt,$$
   puis que $\quad h(x+\pi) + h(x) \geqslant 0$.

5. **Cas où f est 2π-périodique**
   On revient au cas général et on suppose que f est en plus 2π-périodique.
   (a) Si l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une solution 2π-périodique g.
      i. Montrer alors que la fonction φ est 2π-périodique.
      ii. Montrer que, pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\,dt = 0$ et en déduire que
      $$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = 0.$$
   (b) Réciproquement, montrer que si $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = 0$ alors toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont 2π-périodiques.
   (c) Si f est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède-t-elle des solutions 2π-périodiques ?

FIN DE L'ÉPREUVE