Complément 2 : *Arithmétique*

Lundi 20 Décembre 2004

Exercice 1:

Equations à coefficients entiers : Soient a, b, c trois entiers relatifs. On considère l'équation : $ax + by = c$, dont on recherche les solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

1. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que cette équation admette une solution.
2. Soit (x_0, y_0) une solution du problème de Bézout : $ax_0 + by_0 = d$. Déterminer toutes les solutions de $ax + by = c$ en fonction de a, b, c, d, x_0 et y_0.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $2520x - 3960y = 6480$.

Exercice 2:

Equations à coefficients entiers : Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1. $95x + 71y = 46$.
2. $20x - 53y = 3$.
3. $12x + 15y + 20z = 7$.

Exercice 3:

Congruences simultanées ou *théorème des restes chinois* Soient $a, b, n, m \in \mathbb{Z}$ avec $n \wedge m = 1$. On considère le système : ***(S)*** $\begin{cases} x \equiv a & [n] \\ x \equiv b & [m] \end{cases}$

1. Justifier l'existence de $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tel que: $\begin{cases} nu \equiv 1 & [m] \\ mv \equiv 1 & [n] \end{cases}$.
2. En déduire que $x_0 = amv + bnu$ est une solution particulière du sytème ***(S)***.
3. Montrer que toutes les autres solutions sont congrues avec x_0 modulo nm.
4. Résoudre : $\begin{cases} x \equiv 2 & [140] \\ x \equiv -3 & [99] \end{cases}$
5. Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces.

   Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.

   Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.

   Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

   Réponse : 785

Exercice 4:

Théorème des restes chinois généralisé : On se propose de résoudre le système suivant d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x \equiv a_1 \quad [m_1] \\ x \equiv a_2 \quad [m_2] \\ \quad \vdots \\ x \equiv a_n \quad [m_n] \end{cases}$$, où les m_i sont deux à deux premiers entre eux.

1. Montrer que : $\forall i \in [|1, n|], \exists u_i \in \mathbb{N}$ tel que: $M_i u_i \equiv 1 \quad [m_i]$, où $M_i = \dfrac{M}{m_i}$, avec $M = \prod_{i=1}^{n} m_i$.
2. Montrer que $x_0 \sum_{i=1}^{n} a_i M_i u_i$ est solution particulière de $(\mathcal{S})$.
3. Montrer que toutes les autres solutions de $(\mathcal{S})$ sont congrues à $x_0 \quad [M]$, en déduire l'ensemble de solutions du sytéme.
4. Résoudre : $\begin{cases} x \equiv 3 \quad [4] \\ x \equiv -2 \quad [3] \\ x \equiv 7 \quad [5] \end{cases}$

Exercice 5:

Décomposition à coefficients positifs : Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer que : $\forall\ x \geq ab$, $\exists\ u, v \in \mathbb{N}$ tels que $au + bv = x$.

Exercice 6:

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que ab est un carré parfait. Montrer que a et b sont des carrés parfaits.

Exercice 7:

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et m, n premiers entre eux tels que $a^n = b^m$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = c^m$ et $b = c^n$.

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca