

DL 2

A rendre le Jeudi 24-10-2002:

Arithmétique.

Ce problème a été posé comme DS pour l'année 99-2000

Soit m et n deux entiers naturels supérieurs à 2 tels que : $d = n \wedge m \notin \{n, m\}$, on pose $M = n \vee m$.
$$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow [0, n-1] \times [0, m-1] \\ a \rightarrow (r_1 = \text{irem}(a, n), r_2 = \text{irem}(a, m)) \end{array}$$
 on rappelle que : $\text{irem}(a, n)$ désigne le reste de la
division euclidienne de a par n .

1. Montrer que : $g = f_{\llbracket 0, M-1 \rrbracket}$ est injective.
2. On pose $F = f(\mathbb{N})$, montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2 (x, y) \in F \Rightarrow x \equiv y[d]$
3. On se propose dans cette question d'étudier la réciproque de (2), $\forall a \in [0, n-1]$ on pose $F_a = \{(x, y) \in [0, n-1] \times [0, m-1] \text{ tels que : } x - y \equiv a[d]\}$
 - a. Montrer que : $\forall a \in [0, d-1] F_a \neq \emptyset$
 - b. Montrer que : $\forall a \in [0, d-1] F_a$ est fini avec : $\text{Card}(F_a) = M$
 - c. Montrer que $F_0 = F$
 - d. Conclure.
4. Résoudre alors le système d'inconnu $x \in \mathbb{N} : \begin{cases} x \equiv a[n] \\ x \equiv b[m] \end{cases}$