MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

DL 2

A rendre le Jeudi 24-10-2002:

Arithmétique.

Ce probléme a été posé comme *DS* pour l'année 99-2000

Soit m et n deux entiers naturels supérieurs a 2 tels que : $d = n \wedge m \notin \{n,m\}$, on pose $M = n \vee m$.

$$f : \begin{array}{l} IN \to [|0,n-1|]x[|0,m-1|] \\ a \to (r_1 = irem(a,n), r_2 = irem(a,m)) \end{array}$$

on rapelle que : $irem(a,n)$ désigne le reste de la division euclidienne de a par n.

1. Montrer que : $g = f_{\restriction [|0,M-1|]}$ est injective.
2. On pose $F = f(IN)$, montrer que $\forall (x,y) \in IN^2$ $(x,y) \in F \Rightarrow x \equiv y[d]$
3. On se propose dans cette question d'étudier la reciproque de (2), $\forall a \in [|0,n-1|]$ on pose $F_a = \{(x,y) \in [|0,n-1|]x[|0,m-1|] \text{ tels que : } x-y \equiv a[d]\}$
   a. Montrer que : $\forall a \in [|0,d-1|]$ $F_a \neq \emptyset$
   b. Montrer que : $\forall a \in [|0,d-1|]$ F_a est fini avec : $Card(F_a) = M$
   c. Montrer que $F_0 = F$
   d. Conclure.
4. Résoudre alors le systéme d'inconnu $x \in IN$: $\begin{cases} x \equiv a[n] \\ x \equiv b[m] \end{cases}$