

DS 3 : Suites Réelles - Arithmétique

Jeudi 27 Novembre 2003

Durée : 3 heures

Problème 1:

La suite (u_n) de *Fibonacci* est définie par : $u_0 = 1; u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante. (0.5 pt)
2. déduire pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$? (0.5 pt)
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$. (0.5 pt)
4. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, puis $x_n = v_{2n}$ et $y_n = v_{2n+1}$.
 - (a) Démontrer la relation $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$ pour tout entier naturel n . (0.5 pt)
 - (b) Démontrer la relation $v_{n+2} - v_n = \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (0.5 pt)
 - (c) En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes. (0.75 pt)
 - (d) En déduire que la suite (v_n) converge. Quelle est sa limite ? (0.75 pt)
5. Montrer que u_n s'écrit sous la forme $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où r_1, r_2 les solutions de l'équation $r^2 = r + 1$ et λ, μ deux constantes à trouver . (0.75 pt)
6. Retrouver le résultat de 4.d . (0.5 pt)
7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n \in \mathbb{N}, u_n \wedge u_{n+1} = 1$. (0.75 pt)
8. Montrer que : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^{*2} : u_n \wedge u_m = u_{n \wedge m}$ (0.75 pt)
9. Une population de lapins possède la propriété suivante : chaque couple donne naissance à un seul couple ,ce couple ne devient productif qu'après deux mois.
 - (a) Si un fermier commence au 1er mois par élever un seul couple, combien aurait-il de couple au 2ème, 3ème, 4ème, 5ème mois ? (0.75 pt)
 - (b) On note d_n le nombre total de couples de lapins que le fermier aurait au n ème mois . Montrer que $d_n = u_n$. (1.25 pt)

Problème 2:

1. Soient u et v deux entiers naturels premiers entre eux.
 - (a) Montrer que si uv est un carré alors u et v le sont aussi . (0.5 pt)
 - (b) Montrer que $(2u) \wedge (2v) = 2$. (0.25 pt)
 - (c) En déduire que $\text{pgcd}(u+v, u-v)$ est égal à 1 ou 2 . (0.25 pt)
2. Montrer que : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{N}^{*3} : \text{pgcd}(a^2, b^2, c^2) = \text{pgcd}(a, b, c)^2$. (0.5 pt)

Partie II : Triplets pythagoriciens.

Un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tel que $abc \neq 0$ est dit pythagoricien si $a^2 + b^2 = c^2$.

1. Soit (a_0, b_0, c_0) un triplet pythagoricien .Montrer qu'il existe un entier k et 3 entiers a, b et c tels que : $a_0 = ka, b_0 = kb, c_0 = kc$ avec $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$. (0.5 pt)
2. Montrer que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, c) = \text{pgcd}(b, c) = 1$. (0.5 pt)
3. Soient les ensembles

$$A = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 \text{ tel que } abc \neq 0, a^2 + b^2 = c^2, \text{pgcd}(a, b, c) = 1\} \text{ , } B = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2 : r_1^2 + r_2^2 = 1\}$$

.Montrer que l'application $\varphi : A \longrightarrow B$
 $(a, b, c) \longmapsto \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ est bijective. (0.5 pt)

4. On considère le cercle C de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Donner son équation cartésienne .Calculer l'intersection $C' = C - (-1, 0)$ et de la droite $y = t(x + 1)$. (Faire un dessin). On note $(x(t), y(t))$ cette intersection .Donner l'ensemble I de \mathbb{R} sur lequel $x(t)$ et $y(t)$ sont strictement positifs . (0.5 pt)
5. Soit $t \in I$.Montrer que si $x(t)$ et $y(t)$ sont rationnels $\iff t$ est rationnel . (0.5 pt)
6. *Paramétrage des triplets pythagoriciens* : En déduire que tout triplet pythagoricien (a, b, c) s'écrit sous la forme : $a = d(u^2 - v^2)$ $b = 2d u v$ $c = d(u^2 + v^2)$ avec d, u, v des entiers naturels non nuls , $u > v$, u et v premiers entre eux et non tous les deux impairs . (1.25 pt)

Partie III : Equation diophantienne et Théorème de Fermat :

On s'intéresse a l'équation diophantienne $x^4 - y^4 = z^2$ (*) .que l'on cherche a résoudre dans \mathbb{N} .On suppose que (x, y, z) est une solution formée par des entiers tous strictement positifs .

1. Montrer qu'il existe un triplet (x_0, y_0, z_0) solution de (*) avec $\text{pgcd}(x_0, y_0, z_0) = 1$.Montrer que $\text{pgcd}(x_0, y_0) = \text{pgcd}(y_0, z_0) = \text{pgcd}(z_0, x_0) = 1$. (0.5 pt)
2. Montrer que z_0 est impair (*Indication* : étudier suivant la parité de y_0 , si y_0 impair travailler modulo 4) (0.5 pt)
3. On suppose x_0 impair .Paramétrer le triplet pythagoricien (z_0, y_0^2, x_0^2) , puis calculer le produit $x_0^2 y_0^2$.En déduire que (*) admet une solution (x_1, y_1, z_1) avec $x_1 < x_0$ (0.75 pt) .
4. On suppose x_0 pair .
 - (a) Paramétrer le triplet pythagoricien (z_0, y_0^2, x_0^2) par u et v premiers entre eux tels que v pair , u et $\frac{v}{2}$ sont des carrés .(*Indication* : Considérer $(\frac{y_0}{2})^2$) . (0.75 pt)
 - (b) En déduire l'existence de α, β tels que $x_0^2 = \alpha^2 + 4\beta^4$. (0.75 pt)
 - (c) Paramétrer le triplet pythagoricien $(\alpha^2, 2\beta^2, x_0)$ et montrer qu'ils existent p et q tels que $\alpha^2 = p^4 - q^4$. (0.5 pt)
 - (d) En déduire que (*) admet une solution (x_1, y_1, z_1) avec $x_1 < x_0$. (0.5 pt)
5. En déduire le grand théorème de *Fermat* pour $n=4$: l'équation $x^4 + y^4 = z^4$ n'admet pas de solutions (x, y, z) telle que $xyz \neq 0$. (0.75 pt)
6. Montrer que l'aire d'un triangle rectangle a cotés rationnels n'est pas un carré dans \mathbb{Q} . (1.5 pt)

FIN

© : www.chez.com/myismail

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc