MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Devoir Surveillé N°4

Jeudi le:**26-Décembre-2002**

Durée:$3h30mn$

Programme;*Developpemnts limité,courbes,arithmetique,fonctions reélles*

1. (1.5 point) Donner un $DL_3(0)$ de $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{\cot\mathrm{an}(x)}$,en deduire l'equation de la tangente en 0 ainsi que sa position par rapport a la courbe

2. (1.5 point) Etudier les branches infinies (equation et position) en $+\infty$ pour $f(x) = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

3. (1.5 point) Donner la partie principale en 0 de $f(x) = \cos(x)^{\sin(x)} - 1$

4. On considère l'arc géometrique (γ) défini par : $\begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{t^2+t-2} \\ y(t) = \frac{t^2-2t}{t-1} \end{cases}$

- **a**. (0.5 point) Dresser le tableau de variation de (γ)
- **b**. (0.5 point) Etudier les branche infinies
- **c**. (1 point) Construire (γ)

5. On considère l'arc géometrique (γ) défini par : $\begin{cases} x(t) = \frac{2t}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{4(1-2t)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$

- **a**. (0.5 point)Dresser le tableau de variation de (γ)
- **b**. (1 point) Etudier le point stationnaire
- **c**. (0.5 point) Etudier les branche infinies
- **d**. (1 point) Construire (γ)

6. Soit$n \in IN, a \geq 2$ et soient $(m,n) \in IN^{*2}$ tel que : $m \geq n$.on pose $m = qn + r$ avec $0 \leq r < n$,

- **a**. (0.5 points) montrer que : $\exists b \in IN; a^m - 1 = (a^n - 1)b + a^r - 1$.
- **b**. (0.75 points)Montrer que : $(a^m - 1)\wedge(a^n - 1) = a^{m\wedge n} - 1$.
- **c**. (0.25 points)Montrer que : $(a^m - 1)/(a^n - 1)$ ssi m/n.
- **d**. (0.5 points) Soit N_k le nombre qui s'écrit avec k chiffres 1 en base 10 , montrer que :$\forall(h,k) \in (IN^*)^2$, $N_h/N_k \Leftrightarrow h/k$.

7. on appelle fonction polynomiale toute fonction de la forme suivante:$g(x) = a_0 + a_1x + +a_nx^n, n$ s'appelle degré de P et a_n son coefficient dominant

- **a**. Soit g une fonction polynomiale montrer que:
  - **i**. (0.75 points) g paire $\Rightarrow \forall k \in \left[\left|0, E\left(\frac{n-1}{2}\right)\right|\right], a_{2k+1} = 0$
  - **ii**. (0.75 points) g impaire $\Rightarrow \forall k \in \left[\left|0, E\left(\frac{n-1}{2}\right)\right|\right], a_{2k} = 0$

  dans toute la suite on pose $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$si $x \neq 0$,$f(0) = 1$
- **b**. (0.75 points) montrer que : $\forall n \in IN,$ils existent g_n, h_n deux fonction polynomiales telles que:$f^{(n)}(x) = \frac{g_n(x)\sin^n(x) + h_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}, \forall x \neq 0$
- **c**. (0.25 points)exprimer P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n
- **d**. (0.75 points) préciser le degré, le coefficient dominant et la parité de P_n et Q_n suivant les valeurs de n
- **e**. (0.5 points)en partant de la relation $xf(x) = sin(x)$ et en appliquant la formule de Leibniz,trouver une autre relation liant $P_n$et Q_n avec P_{n-1} et Q_{n-1}
- **f**. (0.5 points)en déduire que $P_n{}' = Q_n$ puis que P_n est solution d'une équation différentielle trèssimple
- **g**. (1.5 points)en déduire les coefficients de P_n puis ceux de Q_n
- **h**. (0.75 points)en déduire $f^{(5)}(x)$,$\forall x \neq 0$

Baréme multiplié par 2