MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Controle **N**°2

Samedi le:**26-Octobre-2002**

Structure & Arithmetique

Durée : 1h

- $\forall n \in IN^*$ on pose $\varphi(n) = Card(P_n)$ où $P_n = \{k \in [|1,n|]$ tel que : $k \wedge n = 1\}$
- $\forall n \in IN^*$ on pose $\Psi(n)$ le nombre des diviseurs de n dans IN^*
- $\forall n \in IN^*$ on pose $s(n)$ la somme des diviseurs de n dans IN^*
- $\forall n \in IN^*$ on dit que n est un nombre parfait si $s(n)=2n$
- $\forall n \in IN^*$ on dit que n est un carré parfait si $\exists m \in IN^*\ n = m^2$
- Si A et B sont deux parties de IN on pose $AB = \{ab/(a,b) \in AxB\}$.

1. (0,25 pts) Montrer que $\forall p$ *premier* $\forall n \in IN^*\ (p \wedge n) \in \{1,p\}$.
2. (0,25 pts) En deduire que $\forall p$ *premier* $\forall n \in IN^*\ \ p \wedge n \neq 1 \Leftrightarrow n$ multiple de p.
3. (0,25 pts) Pout tout p *premier* calculer $\varphi(p)$
4. (0.5 pt) Montrer que $\forall p$ *premier* $\forall \alpha \in IN^*\ \varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$(*indication*:On pourra d'abord commencer par denombrer les nombres non premiers avec p^α
5. (1 pt) Montrer que $\forall (n,m) \in IN^{*\,2}\quad m \wedge n = 1 \Rightarrow \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ (*indication*:On pourra d'abord commencer par étudier l'application : $\begin{array}{l} f : P_n x P_m \to P_{nm} \\ \quad (k,k') \mapsto kk' \end{array}$)
6. (0.25 pts) Calculer $\varphi(100)$
7. (1 pt) $\forall p$ *premier* $\forall \alpha \in IN^*$ calculer : $s(p^\alpha)$
8. (1 pt) Trouver tous les diviseurs du nombre d'*Euclide* défini par : $E_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ avec p *et* $2^p - 1$ *premiers*
9. (0.25 pts) En deduire que ces nombres sont parfaits.
10. (1,5 pt)Soit $n \in IN^*$ et $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} .... p_r^{\alpha_r}$ est la decompostion primaire de n alors : $\Psi(n) = \prod_{i=1}^{r}(1 + \alpha_i)$
11. (0.5 pt) En deduire que :$\forall n \in IN^*$ (n est un carré parfait $\Leftrightarrow \Psi(n)$ impair)