CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
رَبِّي إِشرَح لِي صَدرِي وَ يَسِّر لِي أَمرِي وَ
أَحلُل عُقدَةً مِن لِسَانِي يَفقَهُوا قَولِي

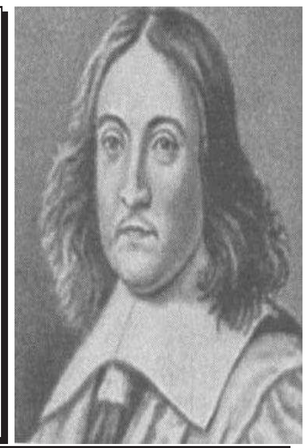
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم
سورة طه

Contrôle 5 (08-09): *Arithmétique* *Séries numériques*

Lundi 6 Avril 2009

Durée : 2 heures

Blague du jour :
Êtes-vous accro à l'Internet ? La réponse serait oui si :
- **A trois heures du matin, vous vous levez pour un besoin pressant et regardez en revenant si vous avez reçu des mails.**
- **Vous inclinez la tête à gauche quand vous souriez**
- **Sur la porte de la cuisine est écrit : "upload"**
- **Sur la porte des toilettes est écrit : "download"**



Mathématicien du jour ***Fermat***
Pierre de Fermat (160 ?-1665), est un juriste et mathématicien français, surnommé « le prince des amateurs ».Il cachait ses méthodes, dont quelques-unes ont été perdues avec lui. Il s'est aussi intéressé aux sciences physiques ; on lui doit notamment le Principe de Fermat en optique.
Il partage avec Descartes la gloire d'avoir appliqué l'algèbre à la géométrie. Il est le premier inventeur du calcul différentiel dont il est un précurseur : il est le premier à utiliser la formule (sinon le concept) du nombre dérivé (en réalité ce concept a été découvert par un grand mathématicien indien, Aryabhata).
Il pose en même temps que Blaise Pascal les bases du calcul des probabilités. Mais sa contribution majeure concerne la théorie des nombres et les équations diophantiennes. Il est très connu pour deux « théorèmes » : le « petit théorème de Fermat » ; le « dernier théorème de Fermat » ; ce dernier n'était qu'une conjecture et l'est resté durant plus de trois siècles de recherches fiévreuses.
Fermat est l'inventeur d'une méthode de démonstration, la descente infinie

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies. **2 points.**

- **Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.**
- **L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.**
- **Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.**
- **Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.**
- **Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.**
- **Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.**

mamouni.myismail@gmail.com
www.chez.com/myismail

- **Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.**
- **Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.**
- **Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.**

Exercice 1 **Source : Thai Ngo (www.mathprepa.fr)**

---

1. Soient a et b des entiers. Montrer que $(a+2b)^4 - a^4$ est divisible par 8.
2. Soient a, b et d des entiers. Montrer que si d divise ab et $a+b$, alors d divise a^2.
3. Si ab divise a^2+b^2, montrer que $a=b$.
4. Montrer que, pour tout entier naturel n, n^3-n est divisible par 6.

Exercice 2 **Source : Concours National-DEUG : Écoles d'Ingénieurs France.**

---

1. Quelques premiers résultats

a. Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n} x^n$.

b. Montrer que la suite de terme général $\frac{\ln n}{n}$ est monotone à partir d'un certain rang que l'on précisera. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

c. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ est-elle absolument convergente ?

d. Calculer $\int_a^b \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ où a et b sont des réels strictement positifs.

2. Equivalent de la somme partielle

Soit n_0 un entier et f une fonction continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

a. Montrer que pour tout entier $k \in [n_0, +\infty[$, on a $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$.

b. En déduire un encadrement de $\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k)$ par deux intégrales que l'on précisera.
Expliciter cet encadrement dans le cas où f est la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ (on calculera les intégrales et on précisera n_0).

c. Déterminer, en justifiant, un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$ (on l'exprimera à l'aide de $\ln n$).

Problème **Source : DL, PCSI, lycée Faidherbe-Lille, France.**

Le but de ce problème est d'étudier, et d'exploiter, quelques propriétés de fonctions de classe C^∞ à dérivées toutes positives ou nulles.
Soit $\alpha \in]0,+\infty[\cup \{+\infty\}$: α est donc un réel strictement positif ou égal à $+\infty$ (on aurait envie d'écrire $\alpha \in]0,+\infty]$...).
On note alors E_α l'ensemble des fonctions f de classe C^∞ sur $[0,\alpha[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in [0,\alpha[$, $f^{(n)}(x) \geq 0$.

III : développement en série entière des éléments de E_α

Soit une fonction $f \in E_\alpha$, fixée.

1. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\text{« } \forall x \in [0,\alpha[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u \text{ ».}$$
<u>Indication</u> : on raisonnera par récurrence simple sur n pour prouver la proposition précédente, en appliquant une intégration par parties bien choisie. Cette formule s'appelle «*formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral*», que l'on reverra dans le cours sur l'intégration.
2. Déduire directement, à l'aide de ce qui précède et d'un changement de variables simple, que l'on a aussi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$$\text{« } \forall x \in [0,\alpha[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(xt)\mathrm{d}t \text{ ».}$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in [0,\alpha[$: on pose $R_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(xt)\mathrm{d}t$.
Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction R_n est croissante sur l'intervalle $[0,\alpha[$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $x, y \in [0,\alpha[$ tels que $x < y$:
$$0 \leq f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).$$
5. Montrer enfin que, pour tout $x \in [0,\alpha[$: $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \right)$.
Cette relation s'appelle le *développement en série entière de la fonction f au voisinage de 0* (voir programme de *spé*).

6. Quelques applications :
   (a) Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)$ pour un $x \geq 0$?
   (b) Compléter la formule : $\ln(2) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{?}{?} \right)$.

I.V : exemple de la fonction arcsinus

1. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un polynôme P_n dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x \in]-1,+1[, \quad \text{Arcsin}^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}.$$
Indication : procéder par récurrence sur $n \geq 1$.
Montrer ensuite que, pour $n \geq 1$, le polynôme P_n solution est unique.

   (b) Vérifier, pour tout $x \in]-1,+1[$, l'égalité : $(1-x^2)\text{Arcsin}''(x) = x\text{Arcsin}'(x)$.
En déduire, à l'aide de la formule de Leibniz, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité polynômiale :
$$P_{n+2} = (2n+1)XP_{n+1} + n^2(1-X^2)P_n.$$

   (c) En déduire que la fonction Arcsin est élément de E_1.

2. (a) A l'aide la relation polynômiale de 1b, déterminer une expression simplifiée de $P_n(0)$ pour tout entier $n \geq 1$. En déduire explicitement $\text{Arcsin}^{(n)}(0)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Une autre méthode (vérification) : déterminer, en primitivant un développement limité usuel au voisinage de 0, un développement limité à tout ordre de la fonction Arcsin au voisinage de 0. Retrouver alors $\text{Arcsin}^{(n)}(0)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Prouver enfin que, pour tout réel $x \in [0,1[$:
$$\text{Arcsin}(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k+1}}{2^{2k}(2k+1)}\right).$$

   (d) Justifier **proprement** que la formule précédente est toujours vraie si $x \in]-1,0[$.

3. Quelques applications :

   (a) Montrer que $\pi = \lim_{n\to+\infty}\left(3\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{16^k(2k+1)}\right)$.
Donner, en exploitant III.4, une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de π à 10^{-9} près (on admet $\pi \leq 4$).

   (b) Trouver une formule du même genre ayant pour limite $\pi\sqrt{2}$.

Fin
Bonne chance