CPGE My Youssef, Rabat

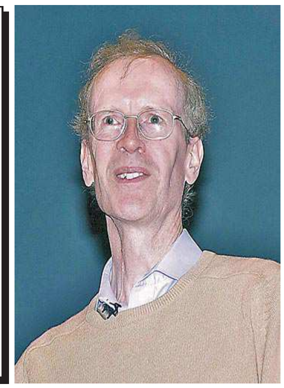
بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé Contrôle 5 (08-09): *Arithmétique Séries numériques*

Lundi 6 Avril 2009
Durée : 2 heures

Blague du jour :
Êtes-vous accro à l'Internet ? La réponse serait oui si :
- **Vous mettez des smileys dans des lettres que vous envoyez.**
- **Vous refusez de partir en vacances à un endroit sans électricité ni ligne de téléphone.**
- **Vous regardez votre mail : "Pas de message." Et vous vérifiez à nouveau.**
- **Votre femme vous apprend vous avez une barbe de 2 mois.**



Mathématicien du jour ***Wiles***
le *dernier théorème de Fermat*, ou théorème de *Fermat-Wiles*, énonce qu'il n'y a pas de nombres entiers non nuls x, y et z tels que : $x^n + y^n = z^n$ pour $n \geq 3$. De manière générale, toutes les solutions pour $n = 2$ sont données par : $x = 2kml$, $y = k(m^2 - l^2), z = k(m^2 + l^2)$, où les nombres k, l et m satisfont les conditions : k entier, $m > l$, m et l de parités différentes. On appelle parfois ces entiers les *triplets pythagoriciens*.
Aprés 300 ans de son énoncé par Fermat, le théorème fût demontré en 1994 par André Wiles. Fermat ecrivait : « J'ai trouvé une merveilleuse démonstration de cette proposition, mais la marge est trop étroite pour la contenir». La plupart des mathématiciens pensent aujourd'hui que Fermat s'était trompé en pensant avoir correctement démontré sa conjecture : la preuve connue (affinée depuis) fait appel à des outils très puissants de théorie des nombres.
Sir Andrew John Wiles (1953 -) est un mathématicien britannique, professeur à l'université de Princeton, aux États-Unis.

Exercice 1 — **Source : Thai Ngo (www.mathprepa.fr)**

1. Calculons
$$\begin{aligned}(a+2b)^4 - a^4 &= ((a+2b)^2 + a^2)((a+2b)^2 - a^2)\\ &= 8\,b(a^2 + 2ab + 2b^2)(a+b).\end{aligned}$$

2. Puisque d divise à la fois ab et $a+b$, il existe deux entiers k et k' tels que $ab = kd$ et $a+b = k'd$. Or les nombres a et b sont solutions de l'équation
$$x^2 - (a+b)x + ab = 0.$$
Donc, on a
$$a^2 - (a+b)a + ab = 0,$$

c'est-à-dire $a^2 = (a+b)a - ab$, soit encore $a^2 = d(k'a - k)$.

3. Si ab divise (a^2+b^2), alors il existe n tel que $a^2+b^2 = abn$.
   Cette relation montre que a^2 est divisible par b et b^2 par a. Il existe donc k et k' tels que $a^2 = bk$ et $b^2 = ak'$.
4. Raisonnons par récurrence. Lorsque $n=0$, $n=1$, $n=2$, cette propriété est vraie. Supposons que c'est vrai pour n, montrons que c'est encore vrai pour $(n+1)$.

$$\begin{aligned}(n+1)^3-(n+1) &= n^3+3n^2+3n+1-n-1\\ &= n^3+3n^2+2n\\ &= n^3-n+3(n^2+n)\\ &= n^3-n+3n(n+1).\end{aligned}$$

   Par hypothèse, (n^3-n) est divisible par 6. De plus, $3n(n+1)$ est divisible par 6 car c'est le produit de deux entiers consécutifs : si l'un est pair, l'autre impair et vice versa. Donc c'est divisible par 6.

Exercice 2

---

1) a) **Á l'aide de la règle de D'Alembert on a $R = \lim\limits_{+\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} = 1$, car $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \ln n$.**

b) **Posons $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, on a $f'(x) = \dfrac{1-x\ln x}{x^2} \leq 0$ pour $x \geq 3$. Donc $\dfrac{\ln n}{n}$ est décroissante vers 0 à partir de $n=3$, ainsi la série $\sum\limits_n (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ converge car vérifie le critère spécial de Leibniz pour les séries alternées.**

c) **En utilisant la règle de comparaison d'une sèrie avec une intégrale, on a $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\ln n}{n}$ (qui est de même nature que $\sum\limits_{n\geq 3} \dfrac{\ln n}{n}$) converge si et seulement si $\displaystyle\int_3^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ est majorée. Or $\displaystyle\int_3^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(\ln t)]_3^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 3) \longrightarrow +\infty$, donc $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\ln n}{n}$ diverge et par suite la sèrie $\sum\limits_n (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ ne converge pas absolument.**

d) $\displaystyle\int_a^b \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln^2 t}{2}\right]_a^b = \frac{\ln^2 b}{2} - \frac{\ln^2 a}{2}$.

2) a) **Il suffit d'intégrer par rapport à t, l'inégalite : $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$.**

b) **En sommant les inégalités précèdentes, on obtient :**

$$\begin{array}{ccccc}\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k+1) & \leq & \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t & \leq & \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k)\\ \displaystyle\sum_{k=n_0+2}^{n+1} f(k) & \leq & \displaystyle\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t & \leq & \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k)\\ \displaystyle\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t & \leq & \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) & \leq & \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}$$

Pour $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ et $n_0 = 3$, on a en particulier

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2 4}{2} = \int_4^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leq \int_3^n \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 3}{2}$$

c) **Comme $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k} \longrightarrow +\infty$, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k} \sim \sum\limits_{k=4}^{n} \dfrac{\ln k}{k} \sim \dfrac{\ln^2 n}{2}$ d'aprés l'encadrement**

précédent.

Problème

III. développement en série entière des élémentsde E_α.

1) **Pour** $n=0$**, le résultat s'écrit :** $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(u)\,\mathrm{d}u$**, qui est vrai.**

Supposons le résultat vrai pour n**, donc :**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x \underbrace{\frac{(x-u)^n}{n!}}_{u'}\underbrace{f^{(n+1)}(u)}_{v}\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\left(\left[-\frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(u)\right]_0^x+\int_0^x\frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(u)\,\mathrm{d}u\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

2) **Poser** $u=xt$

3) **On a** $f^{(n+2)}\geq 0$**, donc** $f^{(n+1)}$ **est croissante, donc** $x\leq y$ **et** $0\leq t\leq 1\Longrightarrow f^{(n+1)}(xt)\leq f^{(n+1)}(yt)\Longrightarrow R_n(x)\leq R_n(y)$**.**

4)

5) **Découle immédiatement de la question précèdente puisque** $\lim\limits_{+\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}=0$**.**

6) a) **Pour** $f(x)=\mathrm{e}^x$**, on a** $f^{(k)}(0)=1$**, donc** $\lim\limits_{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=\mathrm{e}^x$**.**

b) **Pour** $f(x)=\ln(1+x)$**, on a** $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$ **pour** $k\geq 1$ **et** $f(0)=0$**, donc** $\ln 2=\lim\limits_{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$**.**

IV. Exemple de la fonction arcsinus.

1) a) **Par récurrence pour** $n=1$**, on a** $\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$**, donc** $P_1(x)=1$**.**

Supposons $\arcsin^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n-\frac12}}$**, donc**

$$\begin{aligned} \arcsin^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)(1-x^2)^{n-\frac12}+(2n-1)x(1-x^2)^{n-\frac32}P_n(x)}{(1-x^2)^{2n-1}} \\ &= \frac{P_n'(x)(1-x^2)+(2n-1)xP_n(x)}{(1-x^2)^{n+1-\frac12}}=\frac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+1-\frac12}} \end{aligned}$$

b) **On a** $\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$**, en dérivant une autre fois on obtient :**

$\arcsin'' x=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{x\arcsin' x}{1-x^2}$**, d'où** $(1-x^2)\arcsin''(x)=x\arcsin' x$**. Donc :**

$$\begin{aligned} ((1-x^2)\arcsin''(x))^{(n)} &= (x\arcsin' x)^{(n)} \\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{(1-x^2)^{(k)}}_{=0\ \textbf{si}\ n\geq 3}(\arcsin''(x))^{(n-k)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{x^{(k)}}_{=0\ \textbf{si}\ n\geq 2}(\arcsin'(x))^{(n-k)} \\ (1-x^2)\arcsin^{n+2}(x)-2nx\arcsin^{n+1}(x)-n(n-1)\arcsin^{n}(x) &= \arcsin^{n+1}(x)+n\arcsin^{n}(x) \\ (1-x^2)\frac{P_{n+2}(x)}{(1-x^2)^{n+\frac32}}-2nx\frac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+\frac12}}-n(n-1)\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n-\frac12}} &= x\frac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+\frac12}}+n\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n-\frac12}} \\ \frac{P_{n+2}(x)}{(1-x^2)^{n+\frac12}} &= (2n+1)x\frac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+\frac12}}+n^2\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n-\frac12}} \end{aligned}$$

D'où $P_{n+2}(x)=(2n+1)xP_{n+1}(x)+n^2(1-x^2)P_n(x)$**.**

c) **Par récurrence à deux pas, on montre que** $P_n(0) \geq 0,\ \forall x \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$**.**
En effet : $P_1(x) = 1$ **et** $P_2(x) = x$**. On suppose** $P_n(x) \geq 0$ **et** $P_{n+1}(x) \geq 0$ **et on en déduit à partir de (1b) que** $P_{n+2}(x) \geq 0$**. Donc enfin** $\arcsin^{(n)}(x) \geq 0,\ \forall x \in [0,1[$**, d'où** $\arcsin \in E_1$**.**

2) a) **D'après 1b, on a** $P_{n+2}(0) = n^2 P_n(0)$**, or** $P_2(0) = 0$**, donc** $P_{2n}(0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ **D'autre part** $P_{2n+1}(0) = (2n-1)^2 P_{2n-1}(0), P_{2n-1}(0) = (2n-3)^2 P_{2n-3}(0), \dots, P_3(0) = P_1(0) = 1$**, donc**
$P_{2n+1}(0) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k-1)^2 = \frac{\prod_{k=0}^{2n} k^2}{\prod_{k=1}^{n}(2k)^2} = \frac{(2n)!^2}{2^{2n}n!^2}$**. Comme** $\arcsin^{(n)}(0) = P_n(0),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ **et** $\arcsin(0) = 0$**, on conclut que :**

$$\begin{array}{rcl} \arcsin^{(2n)}(0) & = & 0 \\ \arcsin^{(2n+1)}(0) & = & \dfrac{(2n)!^2}{2^{2n}n!^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}$$

b) $\arcsin$ **est la primitive, qui s'annulle en 0, de** $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$**, dont le développement limité au voisinage de 0 est donné par la formule :**
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dots + \dfrac{(-\frac{1}{2}).(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}(-x^2)^n + o(x^{2n})$**, le coéficient de** x^{2n} **est donc** $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}$ **(on reprend les mêmes simplifications faites dans la question (2a)), celui de** x^{2n+1} **(après primitive) de** $\arcsin x$ **est** $\dfrac{(2n+1)!}{2^{2n}n!^2}$**.**
D'après la formule de Taylor-Young : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$**, donc si** a_k **est le coéficient de** x^k **dans le développement limité, alors** $f^{(k)}(0) = k!a_k$**, d'où**

$$\arcsin^{(2k+1)}(0) = \frac{(2k)!^2}{2^{2k}k!^2} = \binom{2k}{k}\frac{(2k)!}{2^{2k}}$$

c) **Résultat immédiat de la question 5.**

d) **La fonction** $x \mapsto \arcsin x$ **étant impaire, on applique la même démarche sur** $]-1,0]$ **à la fonction** $\arcsin(-x)$**.**

3) a) **Prendre** $x = \dfrac{1}{2}$**, on a** $\arcsin x = \dfrac{\pi}{6}$ **et** $\dfrac{x^{2k+1}}{2^{2k}} = \dfrac{1}{2.16^k}$**.**
En prenant $f(x) = \arcsin x, x = \dfrac{1}{2}, y = 1$**, on a** $0 \leq \dfrac{\pi}{6} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{2.16^k(2k+1)} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.\frac{\pi}{2}$**,**
d'où

$$0 \leq \pi - 3\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{16^k(2k+1)} \leq \frac{3}{2^{n-1}}$$

Pour avoir une valeur approchée de π **à** 10^{-9} **près il suffit de chercher** n **tel que** $\dfrac{3}{2^{n-1}} \leq 10^{-9}$**, et la valeur approchée sera** $3\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{16^k(2k+1)}$

b) **En prenant** $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$**, on a** $\arcsin x = \dfrac{\pi}{4}$ **et** $\dfrac{x^{2k+1}}{2^{2k}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}.2^{3k}}$**.**
Donc $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\lim_{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{\sqrt{2}.2^{3k}(2k+1)}$**, et finallement :**

$$\pi\sqrt{2} = \lim_{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{3k-2}(2k+1)}$$

Fin
à la prochaine