CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DL 14 (08-09): *Arithmétique*

28 février 2009

Blagues du jour :
• Une mère au service de scolarité : Je refuse de vous payer l'assurance scolaire pour les petits car moi j'élève mes enfants à la dure et si ils leurs arrivent quelque chose c'est comme ça qu'ils apprendront que la vie c'est pas une partie de plaisir.
• Un parent au professeur de maths, mon fils ne sait pas encore compter, et je ne peux pas continuer encore sur vous pour lui apprendre.

Mathématicien du jour ***Dirichlet.***
Johann Peter Gustav Lejeune Dirislet Poletslet (1805-1859) est un mathématicien allemand. Il fut en contact avec les plus grands mathématiciens français de l'époque, à l'instar de Legendre, Laplace ou Fourier, mais aussi allemand tels Gauss et Jacobi. Il eut entre autres comme élève Riemann.
Les travaux de Dirichlet ont surtout porté sur les séries de Fourier et l'arithmétique. Il résolva le problème de Fermat pour $n = 5$. On lui doit le noyau de Dirichlet qui sert à étudier la convergence des séries de Fourier. On lui doit aussi le principe des tiroirs. Il fut l'un des pionniers de l'utilisation des outils de l'analyse complexe pour attaquer des problèmes arithmétiques, ouvrant la voie à la théorie analytique des nombres.

Exercice 1 . ***p-valuation.***
Soient $n \geq 2$ et p premier, on appelle p-valuation de n, l'entier $v_p(n)$ égale à la puissance de maximale de p qui divise n, par exemple : $v_2(8) = 3, v_2(12) = 2$.

1) **Que vaut $v_p(n)$ si $n \wedge p = 1$**
2) **Justifier que $\forall i \in \mathbb{N}, \quad p^i$ divise $n \Longrightarrow i \leq v_p(n)$.**
3) **Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$**
4) **En déduire que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$: $p^{i+j} \leq n \Longrightarrow E\left(\dfrac{1}{p^j} E\left(\dfrac{n}{p^i}\right)\right) = E\left(\dfrac{n}{p^{i+j}}\right)$**
5) **On pose $m = E\left(\frac{n}{p}\right)$, montrer que : $v_p(n!) = m + v_p(m!)$.**
6) ***Applications :***
   a) **Calculer $v_7(10000!)$**
   b) **Décomposer $16!$ en produits de facteurs premiers.**
   c) **Montrer qu'en base 10, $1000!$ se termine par 249 zéros.**

Exercice 2 . ***Produit de Dirichlet et Formule d'inversion de Moebius.***

- **Une fonction** $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ **est dite arithmétique multiplicative** ***si et seulement si*** **elle vérifie la relation suivante :** $f(nm) = f(n)f(m)$**, pour tous** n, m **tel que** $n \wedge m = 1$.
- **On notera par** $\mathcal{M}$**, l'ensemble de telles fonctions, surlequel on définit l'opération suivante** $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$ **appelée Produit de Dirichlet.**
- **Pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$ **on note par** $\mathcal{D}_n$ **l'ensemble de ses diviseurs dans** $\mathbb{N}$
- **La fonction de Moebius est définit pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$ **par la relation suivante :**

$\mu(n) = 0$ **si** $\exists p$ **premier tel que** p^2 **divise** n
$= (-1)^r$**sinon, où** r **désigne le nombre des diviseurs premiers de** n

1) **Montrer que** $*$ **définit sur** $\mathcal{M}$ **une LCI, puis une structure de groupe abélien d'élément neutre l'application** $e(n) = 0$ **si** $n \neq 1$ **et** $e(1) = 1$.

2) **Montrer que** $*$ **est distributive par rapport à** $+$.

3) **Montrer que** $\mu * \mathbf{1} = e$ **où 1 est la fonction constante sur** $\mathbb{N}^*$ **égale à 1.**

4) **Soient** $f, g \in \mathcal{M}$ **tel que** $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$**, montrer alors que :**

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{d}{n}\right) \quad \textbf{Formule d'inversion de Moebius}$$

Fin
Bonne chance