DL 4 : *Arithmétique.*

Maths-PCSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

A rendre: Lundi 26 Décembre 2005.

1) Fonction indcatrice d'Euler.
Pour tout entier n on note par $D(n)$ l'ensemble de ses diviseurs dans $\mathbb{N}$ et $\varphi(n) = \sum_{d/n} d$. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

a) Montrer que si $n \wedge m = 1$ alors chaque diviseur de nm s'écrit sous la forme *dd'* où d divise n et *d'* divise m.

b) En deduire que : $n \wedge m = 1 \Rightarrow D(nm) = D(n) \mathrm{x} D(m)$.

c) En deduire que : $n \wedge m = 1 \Rightarrow \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$

2) p**- Valuation.** On rapelle que si $n \geq 2$ et p premier $v_p(n)$ désigne la puissance de p dans la décomposition de n en produits de facteurs premiers, et s'appelle la p-valuation de n.

a) Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}$ p^i divise $n \Longrightarrow i \leq v_p(n)$.

b) Montrer que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$ $p^{i+j} \leq n \Longrightarrow E\left(\frac{1}{p^j} E\left(\frac{n}{p^i}\right)\right) = E\left(\frac{n}{p^{i+j}}\right)$.

c) On pose $m = E\left(\frac{n}{p}\right)$, montrer que : $v_p(n!) = m + v_p(m!)$

3) *Applications :*

a) Calculer $v_7(10000!)$

b) Décomposer 16! en produits de facteurs premiers.

c) Monter qu'en base 10 , 1000! se termine par 249 zeros.

4) Nombres d'Euclide et nombres parfaits :

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note par $\varphi(n)$ la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}$.
– Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que n est parfait *ssi* $\varphi(n) = 2n$.
– On appelle *Nombre d'Euclide* tout entier naturel de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ tel que $p, \quad 2^p - 1$ sont premiers.

a) Montrer que si $n \wedge m = 1$ alors chaque diviseur de nm s'écrit sous la forme *dd'* où d divise n et *d'* divise m

b) En deduire que : $n \wedge m = 1 \Rightarrow \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$

c) Soit $E_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ un nombre d'Euclide. Trouver tous les diviseurs de E_p .

d) En déduire que les nombres d'Euclide sont tous parfaits

e) Soit N un nombre parfait pair.

i. Montrer que : $\exists m \in \mathbb{N} \quad \exists q \quad$ *impair* tel que : $N = 2^m q$

ii. Montrer que : $\exists r \in \mathbb{N}^* \quad / \quad q = (2^{m+1} - 1)r, \varphi(q) = 2^{m+1} r$ .On pourra utiliser (2).

iii. Montrer que : *r=1*. On pourra utiliser le fait que N est parfait.

iv. Montrer que $p, 2^p - 1$ sont premiser où *p=m+1*

v. Conclure

f) Soit N un nombre parfait impair $\geqslant 3$. Montrer que N admet au moins 3 diviseurs premiers et en déduire que $N \geq 105$

A l'heure actuelle on ne sait pas s'ils existent des nombres parfaits impairs

Fin.