DS 4 : *Fonctions réelles* *Arithmétique*

Maths-PCSI.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Samedi 21 Janvier 2006.
Durée: 3heures 30mn.

ÉNONCÉ.

PROBLÉME I :**9.5 points**

Source : DS posé en PCSI dans une prépa en France pour l'année 2004-2005.

Dans tout ce problème, p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, et f_p est la fonction de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par $f_p(x) = x^p + px$.

1) (0.5 *pts*) Préciser les variations de la fonction f_p sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f_p est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même.
Pour tout entier $p \geq 2$, on notera g_p l'application réciproque de f_p, c'est-à-dire $g_p = (f_p)^{-1}$, et on notera x_p l'unique solution dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $x^p + px = 1$, autrement dit $x_p = g_p(1)$.
Le but du problème est de décrire une méthode de calcul approché de x_p.

2) a) (0.5 *pts*) Quelles sont les variations de la fonction g_p sur $\mathbb{R}_+$?

b) (0.5 *pts*) Montrer que la fonction g_p est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour $y \geq 0$, exprimer $g_p'(y)$ en fonction de $g_p(y)$.

c) (0.75 *pts*) Montrer que $g_p(y) \sim \sqrt[p]{y}$ lorsque y tend vers $+1$

(Indication : on pourra faire le changement de variable $y = f(x)$).

Pour tout entier $p \geq 2$ fixé et pour tout réel x positif ou nul, on pose :

$$\varphi_p(x) = \frac{(p-1)x^p + 1}{p(x^{p-1}+1)}.$$

3) a) (1.5 *pts*) Vérifier, pour tout $x \geq 0$, la relation $\varphi_p(x) - x =$

$\dfrac{1-f_p(x)}{f_p'(x)}$.
En déduire l'étude du signe de $\varphi_p(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
Quels sont les points fixes de la fonction $\varphi_p(x)$?

b) (*0.75 pts*) Etudier les variations de φ_p *(on vérifiera notamment que la fonction φ_p présente un extremum local au point x_p).*
Dresser un tableau de variations de φ_p en précisant les limites aux bornes.

4) Dans cette question, on fixe toujours $p \geq 2$ et on considère la suite (u_n) initialisée par $u_0 = \dfrac{1}{p}$ et satisfaisant à la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \varphi_p(u_n)$.

a) (*0.5 pts*) Vérifier que $x_p < \dfrac{1}{p}$.

b) (*1 pt*) Démontrer la relation $\forall x \in \left[x_p, \dfrac{1}{p}\right] \quad |\varphi_p'(x)| \leq \dfrac{p-1}{p}$
Indication : on vérifiera que $0 \leq x^p + px - 1 \leq x^p$ sur l'intervalle considéré.

c) (*0.75 pts*) Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |u_{n+1} - x_p| \leq \frac{p-1}{p}|u_n - x_p|$$

d) (*0.75 pts*) En déduire que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = x_p$ et donner une majoration de $|u_n - x_p|$.

5) Dans cette question, on étudie le comportement de la suite $(x_p)_{p\geq 2}$.

a) (*0.5 pts*) Montrer que $\lim\limits_{p \longrightarrow +\infty} x_p = 0$.

b) (*0.5 pts*) Montrer que, pour tout $p \geq 2$, on a :

$$\forall x \in [0,1] \quad f_{p+1}(x) \geq f_p(x)$$

(Indication : on pourra procéder par récurence sur p).

c) (*0.5 pts*) En déduire que la suite (x_p) est décroissante.

d) (*0.5 pts*) En utilisant la question 4.a., montrer que $(x_p)^p = o(px_p)$ lorsque p tend vers $+\infty$.
De la relation $x_p^p + px_p = 1$, déduire un équivalent de x_p lorsque p tend vers $+\infty$.

PROBLÉME II :**9.5 points**

Source : Concours ESSEC-98, prépas Economie.

On considère un nombre réel strictement positif a et la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = e^{a(x-1)}$.
On définit alors une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation $u_{k+1} = f(u_k)$.

1) Convergence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

a) (*0.75 pts*) Établir par récurrence pour tout nombre entier naturel k les inégalités :

$$0 \leq u_k \leq 1 \quad \text{et} \quad u_k \leq u_{k+1}.$$

b) (*0.25 pts*) En déduire la convergence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dont on notera $L(a)$ la limite, qu'on ne cherchera pas à calculer dans cette question.

2) Limite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $a < 1$.

a) (*0.25 pts*) Á l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que :

$$0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1 - u_k).$$

b) (*0.5 pts*) En déduire l'inégalité $0 \leq 1 - u_k \leq a^k$ pour tout nombre entier naturel k, puis la limite $L(a)$ de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour $0 < a < 1$.

3) Limite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $a \geq 1$.

a) *On étudie ici les racines de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geq 1$.*

i. (*0.5 pts*) Prouver que $0 \leq 1 - \dfrac{\ln(a)}{a} \leq 1$ pour $a = 1$.

ii. (*0.5 pts*) Exprimer l'unique racine de l'équation $f'(x) = 1$ en fonction de a.

iii. (*1.5 pts*) En déduire la variation de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ pour $a = 1$, puis pour $a > 1$.
Préciser dans ces deux cas le nombre des racines de l'équation $f(x) = x$.
On convient désormais de noter $r(a)$ la plus petite racine de l'équation $f(x) = x$. On vérifiera en particulier que $0 < r(a) < 1$ pour $a > 1$, et que $r(1) = 1$.

b) *On étudie ici la plus petite racine $r(a)$ de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geq 1$.*

i. (*1 pt*) Étudier et représenter graphiquement sur $[0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto xe^{-x}$.
Comparer les images des nombres a et $ar(a)$ par cette fonction.

ii. (*0.75 pts*) En déduire que la fonction g, définie pour $0 \leq x \leq 1$ par $g(x) = xe^{-x}$, réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, \frac{1}{e}]$ et montrer que la fonction g^{-1} est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$ *(on citera le théorème utilisé).*
Dresser le tableau de variation de g^{-1}.

iii. (*1 pt*) Prouver que $r(a) = \dfrac{1}{a} g^{-1}(ae^{-a})$, puis déterminer la limite de $r(a)$ en $+\infty$.

c) *On étudie maintenant la limite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $a \geq 1$.*

i. (*0.5 pts*) Établir l'inégalité $0 \leq u_k \leq r(a)$ pour tout nombre entier naturel k.

ii. (*1.5 pts*) En déduire la limite $L(a)$ de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour $a \geq 1$.

4) (*0.5 pts*) **Courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.**
Déduire de ces résultats l'allure de la courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.

EXERCICE ARITHMÉTIQUE. **(7 points.)**
Source : effort personnel

1) Coéfficients de Bezout et équations diphontiennes
Soient a, b, c trois entiers relatifs. On considère l'équation : $ax + by = c$, dont on recherche les solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

a) (*0.75 pts*) Montrer que $d = a \wedge b$ divise c est une condition nécéssaire et suffisante pour que cette équation admette une solution.

b) (*1.5 pts*) Soit (x_0, y_0) une solution particulière du problème de Bezout : $ax + by = c$. Déterminer toutes les solutions de $ax + by = c$ en fonction de a, b, d, x_0 et y_0.

c) (*1.5 pts*) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :

i. $2520x - 3960y = 6480$.

ii. $95x + 71y = 46$.

iii. $20x - 53y = 3$.

2) théorème des restes chinois
Soient $a, b, n, m \in \mathbb{Z}$ avec $n \wedge m = 1$. On considère le système :

$$(S) \quad \begin{cases} x \equiv a & [n] \\ x \equiv b & [m] \end{cases}$$

a) (*0.5 pts*) Justifier l'existence de $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\begin{array}{ll} nu \equiv 1 & [m] \\ mv \equiv 1 & [n] \end{array}$

b) (*0.25 pts*) En déduire que $x_0 = amv + bnu$ est une solution particulière du sytème (S)

c) (*0.5 pts*) Montrer que toutes les autres solutions sont congrues avec x_0 modulo nm.

d) (*1.5 pts*) Résoudre : $\begin{array}{ll} x \equiv 2 & [140] \\ x \equiv -3 & [99] \end{array}$

e) (*1.5 pts*) Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (un chinois non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces.
Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.
Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.
Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

$\boxed{\text{Fin.}}$