CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
رَبِّي إِشرَح لِي صَدرِي وَ يَسِّر لِي أَمرِي وَ
أحلُل عُقدَة مِن لِسَانِي يَفقَهُوا قَولِي

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم
سورة طه

DS Commun 7 (08-09): *Arithmétique* *Séries numériques* *Fonctions réelles*

Lundi 6 Avril 2009

Durée : 4heures

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- **Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.**
- **L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.**
- **Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.**
- **Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.**
- **Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.**
- **Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.**
- **Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.**
- **Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.**
- **Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.**

Problème 1

Source: DS-MPSI, Guez de Balzac, Angoulême, France.

Partie I

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(1,0)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_t$ la droite de coefficient directeur t et qui passe par A. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre l'origine et de rayon 1.

Q1) Donner une équation de $\mathcal{D}_t$.

Q2) Montrer que la droite $\mathcal{D}_t$ rencontre le cercle $\mathcal{C}$ en un point $M(x(t), y(t))$ différent de A. Préciser $x(t)$ et $y(t)$.

Q3) Montrer que t est rationnel si et seulement si $x(t)$ et $y(t)$ sont rationnels.

Q4) Montrer que l'on réalise ainsi une bijection entre $\mathbb{Q}$ et $\{M(x,y) \in \mathcal{C} \setminus \{A\} \ / \ x, y \in \mathbb{Q}\}$.

Q5) Déduire de ce qui précède, que les points de $\mathcal{C}$ dont les deux coordonnées sont rationnelles, sont les points $M(x,y)$ avec :

$$\begin{cases} x = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} \\ y = \frac{2pq}{p^2+q^2} \end{cases} \text{ avec } p,q\in\mathbb{Z}, \text{ premiers entre eux.}$$

Partie II

Dans cette partie on considère l'équation $a^2+b^2=c^2$ d'inconnues $a,b,c\in\mathbb{Z}$ avec a,b,c non nuls.

Q1) Donner une solution simple de cette équation (avec a,b,c non nuls). Dans la suite (a,b,c) désigne une solution de l'équation avec a,b,c non nuls.

Q2) Soit $d=\text{PGCD}(a,b)$, montrer que $d=\text{PGCD}(a,c)=\text{PGCD}(b,c)$. Dans la suite, on pose $a=da', b=db'$ et $c=dc'$ avec a',b',c' premiers entre eux deux à deux.

Q3) Justifier l'existence de deux entiers p et q premiers entre eux tels que :

$$\frac{a'}{c'}=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} \text{ et } \frac{b'}{c'}=\frac{2pq}{p^2+q^2}$$

Q4) En déduire qu'il existe un entier k tel que :

$$\begin{cases} p^2-q^2 = ka' \\ 2pq = kb' \\ p^2+q^2 = kc' \end{cases}$$

Q5) a) Montrer que $|k|=\text{PGCD}(p^2+q^2,2pq)=\text{PGCD}(p^2+q^2,2)$.

b) En déduire que si p et q sont de parité différente, alors $|k|=1$. Donner alors l'expression de a, b et c.

c) Montrer que si p et q sont impairs, alors $|k|=2$. Soient $u=\frac{p+q}{2}$ et $v=\frac{p-q}{2}$, montrer que u et v sont premiers entre eux. Exprimer a', b' et c' en fonction de u et v. En déduire a, b et c.

d) Conclure.

Problème 2

Source: DS-MPSI, Guez de Balzac, Angoulême, France.

On pose $f(x)=(x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Q1) a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1, préciser. Dans la suite on étudie la **fonction prolongée**.

c) Montrer que l'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $[1,+\infty[$.

d) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[1;+\infty[$.

Q2) a) Déterminer une fonction h telle que :

$$\forall x>1, f'(x)=2xh(x)$$

b) Étudier la fonction h, en déduire son signe.

. c) En déduire le tableau (complet) des variations de f sur $[1;+\infty[$.

Q3) a) Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x$.

b) *On admet que* $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$ *où* $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$ (on posera $u = \frac{1}{x}$). Que peut-on en conclure ?

Q4) Soit $g(x) = f(x) - 2x$ pour $x > 1$.

a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b) Montrer que pour $u > 0$: $\ln(1+u) \leqslant \dfrac{u(u+2)}{2(u+1)}$, en déduire que $g''(x) \leqslant 0$ (prendre $u = \frac{2}{x-1}$).

c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2$. En déduire le signe de $g'(x)$.

d) Quel est le signe de $g(x)$ sur $[1;+\infty[$?

e) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Problème 3

Source: EM-Lyon 2007, Grande Ecole de commerce

.

Fin
Bonne chance