CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

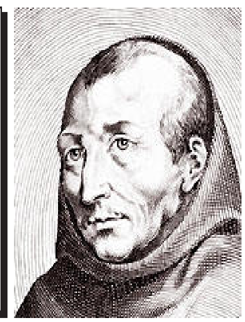
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé DS 7 (08-09): *Arithmétique* *Séries numériques* *Fonctions réelles*

Lundi 6 Avril 2009

Durée : 4heures

Blague du jour :
Deux personnes qui viennent de faire connaissance dans un café discutent :
- Moi, confie le premier, je ne crois que la moitié de ce qu'on me dit.
- Vraiment ! Et quelle est votre profession ?
- Psychanalyste.
- Ah ! Eh bien, moi, c'est tout le contraire : je crois toujours le double de ce que l'on me raconte.
- Quelle est donc votre profession ?
- Inspecteur des impôts.



Mathématicien du jour ***Mersenne***
Marin Mersenne (1588-1648) est un religieux, mathématicien et philosophe français. Il s'intéressait aussi à la théorie de la musique. Il établit les plans du premier sous-marin jamais construit, malhereusement. Les nombres premiers de Mersenne sont encore, à l'heure actuelle, l'objet d'une recherche active.

PROBLÈME 1. Source Patrick Fradin, MPSI, Guez de Balzac, Angoulême, France.

Q1) Une équation de $\mathcal{D}_t$ est $y = t(x-1)$.

Q2) On cherche à résoudre l'équation $x^2 + y^2 = 1$ avec $y = t(x-1)$ et $x \neq 1$, ce qui donne $x^2 + t^2(x-1)^2 = 1$ d'où $x + 1 + t^2(x-1) = 0$ et donc :

$$\boxed{x = \frac{t^2-1}{t^2+1} \text{ et } y = \frac{-2t}{t^2+1}}$$

Q3) Si t est rationnel, alors $x(t)$ et $y(t)$ aussi d'après les formules ci-dessus. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont rationnels alors comme $x(t) \neq 1$ on a $\dfrac{y(t)}{x(t)-1}$ rationnel, c'est à dire $t \in \mathbb{Q}$, donc :

$$\boxed{t \in \mathbb{Q} \iff x(t), y(t) \in \mathbb{Q}}$$

Q4) Soit $E = \{M(x,y) \in \mathcal{C} \setminus \{A\} \ / \ x, y \in \mathbb{Q}\}$. On a une application de $\mathbb{Q}$ dans E qui est évidemment injective. Si $M \in E$, soit t la pente de la droite (AM) alors $M = M(t)$ et $t \in \mathbb{Q}$, donc l'application est également surjective :

$$\boxed{\text{L'application } M : \mathbb{Q} \to E \text{ définie par } M(t) = M(x(t), y(t)) \text{ est bijective}}$$

Q5) En posant $t = -\frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, on obtient $x(t) = \dfrac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ et $y(t) = \dfrac{2pq}{p^2 + q^2}$, ce qui nous donne tous les points de $\mathcal{C} \setminus \{A\}$. On peut remarquer qu'en prenant $q = 0$ et $p = 1$ on obtient $x = 1$ et $y = 0$ ce qui correspond au point A (mais t bien sûr n'est pas défini dans ce cas). Les points de $\mathcal{C}$ à coordonnées rationnelles sont les points $M(x, y)$ avec :

$$\boxed{x = \frac{p^2 - q^2}{{}^2 + q^2},\ y = \frac{2pq}{p^2 + q^2} \text{ avec } p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } p \wedge q = 1}$$

Partie II

Q1) Une solution de cette équation est, par exemple, $a = 3$, $b = 4$ et $c = 5$.

Q2) Si $d = a \wedge b$, alors $d^2 = a^2 \wedge b^2 = (a^2 + b^2) \wedge b^2 = c^2 \wedge b^2 = [c \wedge b]^2$, on en déduit que $\boxed{d = c \wedge b}$. De la même façon, $d^2 = a^2 \wedge b^2 = (a^2 + b^2) \wedge a^2 = c^2 \wedge a^2 = [c \wedge a]^2$, donc $\boxed{d = a \wedge c}$.

Q3) (a, b, c) est solution avec c non nul si et seulement si $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, ce qui revient à dire que le point de coordonnées $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ est un point de $\mathcal{C}$ à coordonnées rationnelles, d'après la partie I, cela équivaut à l'existence de deux entiers p et q premiers entre eux tels que : $\frac{a}{c} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ et $\frac{b}{c} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$, c'est à dire :

$$\boxed{\frac{a'}{c'} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \text{ et } \frac{b'}{c'} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}}$$

Q4) On a $(p^2 + q^2)a' = (p^2 - q^2)c'$ or $a' \wedge c' = 1$ donc $a' \mid p^2 - q^2$ et $c' \mid p^2 + q^2$ ce qui donne $p^2 - q^2 = ka'$ et $p^2 + q^2 = k'c'$, en reportant dans l'égalité, il vient que $k = k'$. De même, $(p^2 + q^2)b' = 2pqc'$ avec $b' \wedge c' = 1$, or $p^2 + q^2 = kc'$ d'où en simplifiant $2pq = kb'$. Finalement :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} p^2 - q^2 & = & ka' \\ 2pq & = & kb' \\ p^2 + q^2 & = & kc' \end{array}\right.}$$

Q5) $(p^2 + q^2) \wedge (2pq) = (ka') \wedge (kb') = k(a' \wedge b') = |k|$. D'autre part, pq et $p^2 + q^2$ sont premiers entre eux, car si un nombre premier divise les deux, alors il doit diviser p ou q, et $p^2 + q^2$, donc il divise p et q : absurde car $p \wedge q = 1$. Il reste donc :

$$\boxed{|k| = (p^2 + q^2) \wedge (2pq) = (p^2 + q^2) \wedge 2}$$

PROBLÈME 2. **Source Patrick Fradin, MPSI, Guez de Balzac, Angoulême, France.**

Q1) a) La fonction f est définie lorsque $\frac{x+1}{x-1}$ est définie strictement positive c'est à dire lorsque $|x| > 1$:

$$\boxed{D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[}$$

b) Pour $x > 1$, on a $f(x) = (x^2 - 1)\ln(x + 1) - (x + 1)(x - 1)\ln(x - 1)$ avec $(x^2 - 1)\ln(1 + x) \underset{1}{\longrightarrow} 0$ et $(x - 1)\ln(x - 1) \underset{1}{\longrightarrow} 0$, car $u \ln(u) \underset{0}{\longrightarrow} 0$ (théorème des croissances comparées), par conséquent : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, on pose donc :

$$\boxed{f(1) = 0}$$

c) On a $f(-x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x)$: la fonction f est **impaire**, l'origine est donc un centre de symétrie pour la courbe, elle admet donc un prolongement par continuité en -1 : $f(-1) = 0$, et on peut limiter l'étude à l'intervalle $[1; +\infty[$.

d) D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue dérivable sur $]1; +\infty[$. Elle est continue en 1 (prolongement par continuité), étudions sa dérivabilité en 1 : $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = (x + 1)\ln(x + 1) - (x + 1)\ln(x - 1) \underset{1}{\longrightarrow} +\infty$:

$$\boxed{f \text{ n'est donc pas dérivable en 1, mais la courbe présente une tangente verticale en ce point.}}$$

Q2) a) Pour $x > 1$, f est dérivable et $f'(x) = 2x\ln(x+1) + (x-1) - 2x\ln(x-1) - (x+1) = 2x\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{1}{x}\right]$, on a donc :

$$\boxed{h(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{1}{x}}$$

b) La fonction h est continue dérivable sur $]1;+\infty[$ et $h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} = -\frac{x^2+1}{x^2(x-1)(x+1)} < 0$, la fonction h et donc strictement décroissante sur $]1;+\infty[$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x > 1, h(x) > 0}$$

c) D'après ce qui précède, on a $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Calculons la limite en $+\infty$: la fraction $\frac{x+1}{x-1}$ tend vers 1, donc le logarithme équivaut à $\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{2}{x-1}$, d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x^2}{x-1}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, d'où le tableau :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Q3) a) On a vu dans la question pécédente que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x^2}{x-1}$, ce qui donne exactement :

$$\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x}$$

b) Avec $x = \frac{1}{u}$, on a $f(x) = (\frac{1}{u^2} - 1)\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) - \frac{2}{u}$, or $(\frac{1}{u^2} - 1)\ln(1+u) = -u + \frac{u^2}{2} + \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + u^2\varepsilon(u) + \varepsilon(u)$ et $(\frac{1}{u^2} - 1)\ln(1-u) = u + \frac{u^2}{2} - \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + u^2\varepsilon(-u) + \varepsilon(-u)$ d'où $f(x) = -2u + \varepsilon(u)[1-u^2] - \varepsilon(-u)[1-u^2] \xrightarrow[u\to 0]{} 0$, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0}$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ (et en $-\infty$ par symétrie).

Q4) a) On a $g'(x) = f'(x) - 2$ et $g''(x) = f''(x) = 2[h(x) + h'(x)] = \boxed{2\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{2x}{x^2-1}\right]}$.

b) Soit $L(u) = \ln(1+u) - \frac{u(u+2)}{2(u+1)}$ avec $u \geqslant 0$. Cette fonction est dérivable et $L'(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{u^2+2u+2}{2(1+u)^2} = \frac{-u^2}{2(1+u)^2} < 0$, la fonction L est donc décroissante sur $[0;+\infty[$, comme $L(0) = 0$, on en déduit que $L(u) \leqslant 0$ c'est à dire :

$$\boxed{\ln(1+u) \leqslant \frac{u(u+2)}{2(u+1)}}$$

En posant $u = \frac{2}{x-1}$, on a $u > 0$ et $g''(x) = 2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{4x}{x^2-1} = 2\left[\ln(1+u) - \frac{u(u+2)}{2(u+1)}\right]$, par conséquent :

$$\boxed{\forall x > 1, g''(x) \leqslant 0}$$

c) On sait que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x$, or $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ donc $2x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} 4$, or $f'(x) = 2x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2$, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2}$$

La fonction g' est décroissante sur $]1;+\infty[$ et sa limite en $= \infty$ est nulle car $g'(x) = f'(x) - 2$, donc :

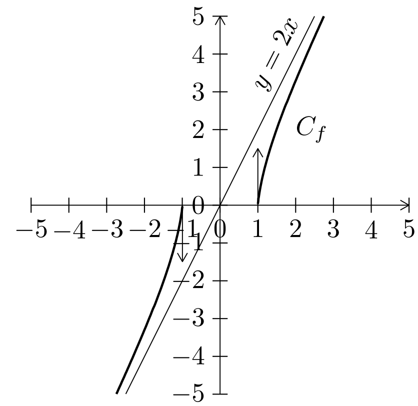
$$\boxed{\forall x > 1, g'(x) \geqslant 0}$$

d) On en déduit que la fonction g est croissante sur $[1;+\infty[$, or $\lim_{x\to=\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$, par conséquent :

$$\boxed{\forall x \geqslant 1, g(x) \leqslant 0}$$

La courbe de f est donc sous l'asymptote.

e) Allure de la courbe :



PROBLÈME 3. **Source : My Ismail Mamouni, MPSI, My Youssef, Rabat, Maroc.**

Partie I :

1) f **est continue sur** $]0,+\infty[$ **en tant que rapport de deux fonctions continues, d'autre part** $\lim_0 f(x) = 1 = f(0)$**, donc** f **continue en 0, par suite sur** $[0,+\infty[$**.**

2) **a)** f **est dérivable sur** $]0,+\infty[$ **en tant que rapport de fonctions dérivable, avec**

```
> f'(x):=diff(ln(1+x)/x,x);
```

$$f'(x) := \frac{1}{(1+x)\,x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \frac{A(x)}{x^2}$$

Ainsi f' **est continue sur** $]0,+\infty[$ **en tant que rapport de fonctions continues, d'où** f **est de classe** $\mathcal{C}^1$**.**

b) **On effectue un** $DL_2(0)$**, d'où :**

```
> f(x):=taylor(diff(ln(1+x)/x,x),x=0,3);
```

$$f(x) := -\frac{1}{2} + \mathrm{O}(x)$$

c) **On a** f **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]0,+\infty[$**, de plus** $\lim_0 f' = -\frac{1}{2}$**, d'après le théorème de prolongement de la dérivée, on a** f **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[0,+\infty[$**, avec** $f'(0) = -\frac{1}{2}$**.**

d) **.**

```
> A'(x):=diff(x/(1+x)-ln(1+x),x);
```

$$\mathrm{A}'(x) := -\frac{x}{(1+x)^2} < 0$$

e) $\lim_{+\infty} f = 0$**.**

3) **a)** f **est deux dérivable sur** $]0,+\infty[$ **en tant que rapport de focntions deux fois dérivables, avec :**

```
> f"(x):=diff(ln(1+x)/x,x,x);
```

$$f"(x) := -\frac{1}{(1+x)^2\,x} - \frac{2}{(1+x)\,x^2} + 2\,\frac{\ln(1+x)}{x^3} = \frac{B(x)}{x^3}$$

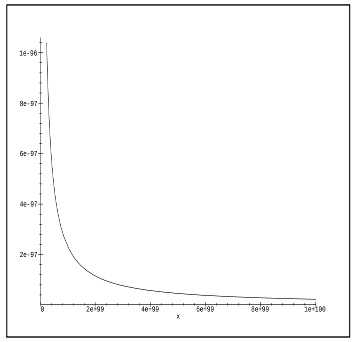
b) **Les calculs donnent :**

```
> B'(x):=simplify(diff(-(3*x^2+2*x)/(1+x)^2+2*ln(1+x),x));
```

$$B'(x) := 2\,\frac{x^2}{(1+x)^3} \geq 0$$

Donc $B(x) \geq B(0) = 0\ \forall x \geq 0$**, d'où** $f" \geq 0$ **et par suite** f **est convexe.**

```
> plot(ln(1+x)/x,x=0..10^100,color=black);
```



Partie II

1) **Découle de la formule** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ **où** $a=-t\neq 1$.

2) **Il suffit d'intégrer la formule précèdente entre 0 et** x.

3) $\displaystyle |J_N(x)| = \left|\int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \left|\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\right| \mathrm{d}t \leq \int_0^x t^{N+1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{N+2}}{N+2}$

4) **D'après la question précèdente, on a :** $\displaystyle\left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\right| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2} \leq \frac{1}{N+2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, **donc la série** $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ **converge, avec** $\displaystyle\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

Partie III

1) **Utiliser la question II.3 et le fait que** $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ **si** $x\neq 0$, **on remarquera que pour** $x=0$, **la différence est nulle.**

2) **La série** $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ **converge en tant que série dont la valeur absolue du terme général décroit vers 0. En intégrant l'inégalité précèdente, on obtient :** $\displaystyle\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(N+2)^2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. **Donc** $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

3) $\displaystyle\sum_{n=1} 2N+1\frac{1}{n^2} = \sum_{1\leq n=2p+1\leq 2N+1}\frac{1}{n^2} + \sum_{1\leq n=2p\leq 2N+1}\frac{1}{n^2}$.

4) $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{\pi^2}{24}$, **d'où** $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, **et enfin** $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2} = \frac{\pi^2}{12}$

Fin
à la prochaine