MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

DS N°2

Samedi le:**02-Novembre-2002**

Durée : 3h

Programme : Complexes & Groupes Cycliques

Probléme :

$\forall n \in IN^*$ on pose :
$U_n = \{z \in C / z^n = 1\}, \omega_n = e^{2i\frac{\pi}{n}}, \varphi(n) = Card\{k \in [|1,n|] / k \wedge n = 1\}$

1. (0,5)Montrer que U_n est un groupe cyclique engendré par ω_n.
2. (0.75)A quelle condition $\omega \in U_n$ engendre U_n.
3. (0.25)En deduire le nombre des génerateurs de U_n.
4. Soit $(m,n) \in IN^{*2}$ fixes et $G = U_n x U_m$, $\forall(\alpha,\beta) \in G, \forall(\alpha',\beta') \in G$ on pose $(\alpha,\beta) * (\alpha',\beta') = (\alpha\alpha',\beta\beta')$
   a. (0.25)Montrer qu'on definit ainsi sur G une LCI
   b. (0.5)Montrer que $(G,*)$ groupe abelien.
   c. (0.25)Calculer $Card(G)$
5. (0.5)Montrer que $\forall(\alpha,\beta) \in G, \forall k \in IN^*$ on a : $(\alpha,\beta)^k = (\alpha^k,\beta^k)$.
6. (1pt)En deduire que $\forall(\alpha,\beta) \in G$ on a : (α,β) d'ordre fini avec $o((\alpha,\beta)) = o(\alpha) \vee o(\beta)$.
7. (0.5)En deduire que $\forall(\alpha,\beta) \in G$ on a : $o((\alpha,\beta)) \leq n \vee m$.
8. (1.5)Montrer que: G cyclique $\Rightarrow n \wedge m = 1$.
9. On suppose que : $n \wedge m = 1$.
   a. (1.5)Montrer que G est engendré par (ω_n,ω_m).
   b. (1.5)Soit $(\alpha,\beta) \in G$, Montrer que (α,β) engendre $G \Leftrightarrow \alpha$ engendre U_n. et β engendre U_m
   c. (1.5)En deduire que . $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$

Exercice :

$\forall z = x + iy \in C$ on pose $e^z = e^x e^{iy}, \cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$

1. (0.5)Calculer les parties réelles de $\cos(z)$ et $\sin(z)$ en fonction de x et y.
2. (0.5)Calculer les parties imaginaires de $\cos(z)$ et $\sin(z)$ en fonction de x et y.
3. (0.5)Calculer les modules de $\cos(z)$ et $\sin(z)$ en fonction de x et y.
4. (0.5)Calculer les arguments de $\cos(z)$ et $\sin(z)$ en fonction de x et y.
5. (0.25)Comparer $\overline{\cos(z)}$ et $\cos(\bar{z})$
6. (0.25)Donner une CNS pour que $\cos(z) \in IR$.
7. (1 pt) Resoudre $sin(z) = -\frac{5}{2}$