DS 2 : *Corrigé*

Lundi le 20 Octobre 2003

Exercice 1:

L'hypothèse AMB est un triangle rectangle isocèle direct de sommet principal M" signifie que le vecteur $\overrightarrow{MA}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{MB}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$, soit $a - m = i(b - m)$, d'où

$$m = \frac{a - ib}{1 - i} = \frac{(1 + i)(a - ib)}{2}$$

De même, $n = \frac{(1 + i)(b - ic)}{2}$, $p = \frac{(1 + i)(c - id)}{2}$; et $\frac{(1 + i)(d - ia)}{2}$.Les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NQ}$ ont alors pour affixes respectivement

$$p - m = \frac{1 + i}{2}\left[(c - a) - i(d - b)\right] \quad \text{et} \quad q - n = \frac{1 + i}{2}\left[(d - b) - i(a - c)\right]$$

On a ainsi $q - n = i(p - m)$, ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{NQ}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{MP}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ (on dit aussi que $\overrightarrow{NQ}$ est le vecteur *directement orthogonal* au vecteur $\overrightarrow{MP}$), d'où $|p - m| = |n - q|$ (égalité des distances $MP = NQ$) et $arg\left(\frac{q - n}{p - m}\right)$ (c'est-à-dire $(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ}}) = \frac{\pi}{2}$: les vecteurs sont orthogonaux).

Exercice 2:

Par hypothèse, on a $\mathbf{(1)}$: $a+ib = c+id$ et $\mathbf{(2)}$: $a+c = b+d$.La relation $\mathbf{(2)}$ peut s'écrire $\frac{a + c}{2} = \frac{b + d}{2}$: les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu, donc $ABCD$ est un parallélogramme (on peut aussi l'écrire $b - a = c - d$, soit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, d'où la même conclusion). La relation $\mathbf{(1)}$ peut s'écrire $c - a = i(b - d)$: le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{DB}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ ($\overrightarrow{AC}$ est le vecteur directement orthogonal à $\overrightarrow{DB}$), donc les diagonales $[A, C]$ et $[B, D]$ ont même longueur ($ABCD$ est un rectangle) et sont perpendiculaires ($ABCD$ est un losange). Finalement, $ABCD$ est un carré.Réciproquement, si $ABCD$ est un carré, alors ses diagonales se coupent en leur milieu
($a + c = b + d$) et elles sont perpendiculaires de même longueur (le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{DB}$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, soit $c - a = \pm i(b - d)$, soit encore $a + ib = c + id$ ou $a - ib = c - id$).Les relations $\mathbf{(1)}$ et $\mathbf{(2)}$ caractérisent en fait les carrés "directs".

Exercice 3:

Supposons $f(z)$ et $g(z)$ imaginaires purs (un nombre complexe u est imaginaire pur si et seulement si $u + \overline{u} = 0$). On a alors

$$(\overline{b} - \overline{c})(z - a) + (b - c)(\overline{z} - \overline{a}) = 0 \qquad \text{et} \qquad (\overline{c} - \overline{a})(z - b) + (c - a)(\overline{z} - \overline{b}) = 0\ .$$

En ajoutant ces deux relations et en simplifiant, on obtient $(\overline{b} - \overline{a})(z - c) + (b - a)(\overline{z} - \overline{c}) = 0$, donc $h(z) = \frac{z-c}{a-b} \in i\mathbb{R}$.On a ainsi montré que, si un point H d'affixe z vérifie $(AH) \perp (BC)$ et

$(BH) \perp (AC)$ -or, un tel point H existe et est unique puisque la perpendiculaire à (BC) issue de A et la perpendiculaire à (AC) issue de B sont sécantes- alors on a aussi $(CH) \perp (AB)$. Cela démontre que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes (leur point de concours H est l'**orthocentre** du triangle ABC).

Exercice 4:

1. Posons $z = x + iy$ avec x et y réels. On a les équivalences

$$\begin{aligned} z' \in \mathbb{R} &\iff \overline{z'} = z' \\ &\iff (z-3+i)(-2i-\overline{z}) = (\overline{z}-3-i)(2i-z) \\ &\iff (-3-3i)z + (3-3i)\overline{z} + 12i = 0 \qquad (\textit{après simplifications}) \\ &\iff -(z-\overline{z}) - i(z+\overline{z}) + 4i = 0 \\ &\iff -2iy - 2ix + 4i = 0 \\ &\iff x + y = 2\ . \end{aligned}$$

   L'ensemble recherché est donc la droite d'équation cartésienne $x + y = 2$ (privée du point A d'affixe $2i$).

2. Un nombre complexe non nul a pour argument $\dfrac{3\pi}{2}$ modulo 2π si et seulement si il appartient à $i\mathbb{R}_-$, c'est-à-dire si et seulement si sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire strictement négative. Avec $z = x + iy$, on a

$$z' = \frac{(x-3)+i(y+1)}{-x+i(2-y)} = \frac{-(x^2+y^2-3x-y-2)+i(-3x-3y+6)}{x^2+(y-2)^2}$$

   Donc

$$\arg(z') = \frac{3\pi}{2} \quad [2\pi] \iff \begin{cases} x^2+y^2-3x-y-2=0 \\ x+y-2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{2} \\ x+y>2 \end{cases}$$

   L'équation **(*)** est celle du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω d'affixe $\dfrac{3+i}{2}$ et de rayon $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. La droite d'équation $x + y = 2$ passe par Ω et est donc un diamètre de ce cercle. L'ensemble des solutions est donc représenté graphiquement par un demi-cercle ouvert (c'est-à-dire extrémités non comprises) du cercle $\mathcal{C}$, limité par les points $A(2i)$ et $B(3-i)$: c'est le demi-cercle situé au-dessus de la droite d'équation $x + y = 2$.

3. Allez, c'est parti...

$$\begin{aligned} |z'| = 2 &\iff |z'|^2 = 4 \iff (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4\left[x^2 + (2-y)^2\right] \\ &\iff x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0 \\ &\iff (x+1)^2 + (y-3)^2 = 8\ . \end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions est ici le cercle $\mathcal{C}'$ de centre $\Omega'(-1+3i)$ et de rayon $2\sqrt{2}$. *Remarques.* Nous noterons toujours A le point d'affixe $a = 2i$ et B le point d'affixe $b = 3 - i$.

   • Le calcul de z' fait au début de la question **2.** permettait en fait de répondre plus rapidement à la question **a.** puisque la condition cherchée se traduit par $\Im(z') = 0$.

• On peut donner une solution géometrique de la question **a.** :

$$\begin{aligned} z' \in \quad & \Longleftrightarrow \quad \arg(z') = 0 \quad [\pi] \\ & \Longleftrightarrow \quad \arg(z-3+i) = \arg(z-2i) \quad [\pi] \\ & \Longleftrightarrow \quad (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}}) = 0 \quad [\pi] \\ & \Longleftrightarrow \quad M \in (AB)\ . \end{aligned}$$

• On peut aussi donner une solution géometrique de la question **2.** :

$$\begin{aligned} \arg(z') = \frac{3\pi}{2} \quad [2\pi] \quad & \Longleftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z-b}{a-z}\right) = \frac{3\pi}{2} \quad [2\pi] \\ & \Longleftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\ & \Longleftrightarrow \quad (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]\ . \end{aligned}$$

On sait que l'ensemble des points M tels que $\widehat{AMB}$ soit un angle droit (ce qui équivaut à $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$) est le cercle de diamètre $[A, B]$. Il reste à voir que cet angle droit est dans le sens direct lorsque M parcourt un des deux demi-cercles de diamètre $[A, B]$...

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc