DS 3 : *Structures - Nombres complexes*

Lundi 06 Décembre 2004

Durée : *3 heures*

Problème 1:

Anneau booléen : Un anneau $(A, +, \times)$ est dit booléen si : $\forall x \in A \quad x^2 = x$.
On considére dans toute la suite du problème que $(A, +, \times)$ est un anneau booléen non réduit à $\{0\}$.

1. (a) (0.5 pts) En développant $(x+x)^2$, montrer que $\forall x \in A$, on a : $2x = 0_A$.

   (b) (0.5 pts) En développant $(x+y)^2$, montrer que $\forall (x,y) \in A^2$, on a : $xy + yx = 0_A$.

   (c) (0.5 pts) En déduire que tout anneau booléen est commutatif.

2. (0.5 pts) Soit E un ensemble non vide, pour toute partie A de E on associe l'application notée φ_A appelée fonction caractéristique de A définie par : $\varphi_A : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \varphi_A(x) = 1 \text{ si } x \in A \\ \varphi_A(x) = 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$

   (a) (0.5 pts) Montrer $\varphi_E = 1, \quad \varphi_\emptyset = 0$.

   (b) (2 pts) Soient A et B deux parties de E montrer que :
   $\varphi_{A \cap B} = \varphi_A \varphi_B, \quad \varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \varphi_B, \quad \varphi_{\overline{A}} = 1 - \varphi_A, \quad \varphi_{A \Delta B} = \varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A \varphi_B.$

   (c) (0.5 pts) Soient A et B deux parties de E montrer que $1_A = 1_B \implies A = B$.

   (d) (1.5 pts) En déduire que si A, B *et* C sont trois parties de E alors :
   $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C \quad A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

   (e) (1.5 pts) En déduire que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau booléen.

   (f) (1.5 pts) Soit A une partie de E, montrer que $\{\emptyset, A, \overline{A}, E\}$ est un sous-anneau de $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$.

3. (0.75 pts) On suppose dans cette question que $(A, +, \times)$ est intégre, montrer que card$(A) \leq 2$.

4. (0.75 pts) Soit $\mathcal{A} = \{a \in A \setminus \{0_A\}$ tel que: $ax \in \{0_A, a\} \quad \forall x \in A\}$. Soient $a \in \mathcal{A}, a' \in \mathcal{A}$ tel que: $a \neq a'$, montrer que : $aa' = 0_A$.

5. Soit $\Phi : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{A}) \\ x & \longmapsto & \Phi(x) = \{a \in \mathcal{A} \text{ tel que: } ax = a\} \end{array}$.

   (a) Soit $(x,y) \in A^2$, montrer qu'on a les proriétés suivantes :

      i. (0.75 pts) $\Phi(xy) = \Phi(x) \cap \Phi(y)$.

      ii. (0.75 pts) $\Phi(x + y + xy) = \Phi(x) \cup \Phi(y)$.

      iii. (0.75 pts) $\Phi(1_A + x) = \overline{\Phi(x)}$.

      iv. (0.75 pts) $\Phi(x + y) = \Phi(x)\Delta\Phi(y)$.

   (b) (0.75 pts) En déduire que Φ est un morphisme d'anneaux.

6. On suppose dans la suite que A est fini.

(a) (0.25 pts) Soit $a_0 \in A$ tel que: $a_0 \notin \mathcal{A}$ et $a_0 \neq 0$. Dites pourquoi $\exists x \in A$ tel que: $a_0 x_1 \neq 0_A$ et $a_0 x_1 \neq a_0$.

(b) (1.5 pts) En déduire que : $\exists x \in A$ tel que: $a_0 x \in \mathcal{A}$. *Indication : On pourra raisonner par l'absurde.*

(c) (1 pt) Conclure que Φ est injectif.

(d) (1 pt) Soit $F = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ une partie de $\mathcal{A}$. Montrer que $\Phi(\sum_{i=1}^{p} x_i) = F$. En déduire que Φ est surjectif.

(e) (0.5 pts) Conclure que tout anneau booléen fini est de cardinal une puissance de 2

Essai

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca