

DS 3 : Structures - Nombres complexes

Lundi 06 Décembre 2004

Durée : 3 heures**Problème 1:**

Anneau booléen : Un anneau $(A, +, \times)$ est dit booléen si : $\forall x \in A \quad x^2 = x$.

On considère dans toute la suite du problème que $(A, +, \times)$ est un anneau booléen non réduit à $\{0\}$.

1. (a) (0.5 pts) En développant $(x + x)^2$, montrer que $\forall x \in A$, on a : $2x = 0_A$.
 (b) (0.5 pts) En développant $(x + y)^2$, montrer que $\forall (x, y) \in A^2$, on a : $xy + yx = 0_A$.
 (c) (0.5 pts) En déduire que tout anneau booléen est commutatif.
2. (0.5 pts) Soit E un ensemble non vide, pour toute partie A de E on associe l'application notée φ_A appelée fonction caractéristique de A définie par : $\varphi_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \varphi_A(x) = 1 & \text{si } x \in A \\ \varphi_A(x) = 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$
 - (a) (0.5 pts) Montrer $\varphi_E = 1$, $\varphi_\emptyset = 0$.
 - (b) (2 pts) Soient A et B deux parties de E montrer que :
 $\varphi_{A \cap B} = \varphi_A \varphi_B$, $\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \varphi_B$, $\varphi_{\bar{A}} = 1 - \varphi_A$, $\varphi_{A \Delta B} = \varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A \varphi_B$.
 - (c) (0.5 pts) Soient A et B deux parties de E montrer que $1_A = 1_B \implies A = B$.
 - (d) (1.5 pts) En déduire que si A, B et C sont trois parties de E alors :
 $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
 - (e) (1.5 pts) En déduire que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau booléen.
 - (f) (1.5 pts) Soit A une partie de E , montrer que $\{\emptyset, A, \bar{A}, E\}$ est un sous-anneau de $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$.
3. (0.75 pts) On suppose dans cette question que $(A, +, \times)$ est intègre, montrer que $\text{card}(A) \leq 2$.
4. (0.75 pts) Soit $\mathcal{A} = \{a \in A \setminus \{0_A\} \text{ tel que: } ax \in \{0_A, a\} \quad \forall x \in A\}$. Soient $a \in \mathcal{A}, a' \in \mathcal{A}$ tel que: $a \neq a'$, montrer que : $aa' = 0_A$.
5. Soit $\Phi : A \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$

$$x \longmapsto \Phi(x) = \{a \in \mathcal{A} \text{ tel que: } ax = a\}$$
 - (a) Soit $(x, y) \in A^2$, montrer qu'on a les propriétés suivantes :
 - i. (0.75 pts) $\Phi(xy) = \Phi(x) \cap \Phi(y)$.
 - ii. (0.75 pts) $\Phi(x + y + xy) = \Phi(x) \cup \Phi(y)$.
 - iii. (0.75 pts) $\Phi(1_A + x) = \overline{\Phi(x)}$.
 - iv. (0.75 pts) $\Phi(x + y) = \Phi(x) \Delta \Phi(y)$.
 - (b) (0.75 pts) En déduire que Φ est un morphisme d'anneaux.
6. On suppose dans la suite que A est fini.

- (a) (0.25 pts) Soit $a_0 \in A$ tel que: $a_0 \notin \mathcal{A}$ et $a_0 \neq 0$. Dites pourquoi $\exists x \in A$ tel que: $a_0x_1 \neq 0_A$ et $a_0x_1 \neq a_0$.
- (b) (1.5 pts) En déduire que : $\exists x \in A$ tel que: $a_0x \in \mathcal{A}$. *Indication : On pourra raisonner par l'absurde.*
- (c) (1 pt) Conclure que Φ est injectif.
- (d) (1 pt) Soit $F = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ une partie de \mathcal{A} . Montrer que $\Phi\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) = F$. En déduire que Φ est surjectif.
- (e) (0.5 pts) Conclure que tout anneau booléen fini est de cardinal une puissance de 2
-

Essai

FIN

©2000-2004 <http://www.chez.com/myismail>

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca