# Répartition des puissances d'un complexe de module 1

On note $U$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
On note $U_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

On note $d(z,z') = |z' - z|$ la distance entre deux complexes $z$ et $z'$.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on note :
+ $\arg(z)$ l'argument du complexe $z$ défini à $2\pi$ près.
+ $Arg(z)$ l'unique argument de $z$ qui appartient à $[0,2\pi[$ (appelé argument principal de $z$).

On se donne $\theta \in [0,2\pi[$ , et on considère l'ensemble $V = \{z_n \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$ avec $z_n = e^{in\theta}$.
L'objectif de ce problème est l'étude de cet ensemble $V$.

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Déterminer $d(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$.
   On exprimera la solution sans radicaux et en fonction de $\dfrac{\beta - \alpha}{2}$.

2. On suppose $\theta/\pi \in \mathbb{Q}$ et on forme $A = \{n \in \mathbb{N}^* / z_n = 1\}$.

2.a Montrer que $A$ possède un plus petit élément. Notons $m$ celui-ci.

2.b Etablir que les $z_0, \ldots, z_{m-1}$ sont deux à deux distincts.

2.c Montrer que $V = U_m$.

Dans toute la suite du problème, on suppose $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$.

3. Montrer que les $z_n$ sont deux à deux distincts.

4. Soit $Z \in U$ et $\varepsilon > 0$.
   On désire établir l'existence d'un $m \in \mathbb{Z}$ tel que $d(z_m, Z) \leq \varepsilon$.
   On se donne $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ de sorte que $\dfrac{2\pi}{n} \leq \varepsilon$.
   On introduit, pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}, A_k = \left\{z \in U \,/\, k\dfrac{2\pi}{n} \leq Arg(z) < (k+1)\dfrac{2\pi}{n}\right\}$.

4.a Etablir que la famille $(A_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ forme une partition de $U$.

4.b Montrer que parmi les $z_0, \ldots, z_n$ deux éléments au moins se trouvent dans un même $A_k$.

On note $p$ et $q$ leurs indices respectifs et on pose $\varphi = Arg(z_p)$ et $\psi = Arg(z_q)$.

Quitte à échanger $p$ et $q$ on peut supposer $\varphi < \psi$ et on a par construction $\psi - \varphi \in ]0, 2\pi/n]$.

4.c Etablir $Arg(z_{q-p}) = \psi - \varphi$.

4.d On note $\alpha = Arg(Z)$ et on considère $k$ le plus grand entier tel que $k(\psi - \varphi) \leq \alpha$.
   Montrer que $d(Z, z_{k(q-p)}) \leq 2\sin\dfrac{\psi - \varphi}{2}$.

4.e Etablir $\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x$, et conclure.

Rq : Le résultat établi dans la question 4 pourrait s'interpréter : $V$ est dense dans $U$ ...