

Approche historique des nombres complexes

Problème I.

I Équations du troisième degré

Soit p et q deux réels fixés. On cherche à résoudre par la méthode dite de Cardan¹, l'équation d'inconnue x , $x^3 + px + q = 0$. On suppose qu'il existe deux nombres u et v vérifiant :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

Démontrer que le nombre $u + v$ est solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

II Résolution de l'équation $(E_1) : x^3 - 6x - 6 = 0$

1. En étudiant le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 6x - 6$, déterminer le nombre de solution(s) de l'équation (E_1) .

Encadrer chaque solution par deux entiers consécutifs.

2. On cherche deux nombres u et v vérifiant :
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 6 \\ uv = 2 \end{cases}$$

Démontrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $X^2 - 6X + 8 = 0$. En déduire u et v .

3. Déterminer la valeur exacte de la solution réelle de l'équation (E_1) .

III Résolution de l'équation $(E_2) : x^3 - 30x + 36 = 0$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le nombre de solution(s) de l'équation (E_2) ?

2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2 + 36X + 1000 = 0$.

(b) Peut-on trouver deux nombres réels u et v vérifiant
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -36 \\ uv = 10 \end{cases} ?$$

- (c) Écrire $X^2 + 36X + 1000$ sous forme canonique.

3. Pour pouvoir utiliser la méthode de la partie 2, Rafaël Bombelli (1526-1573) transgressa les interdits et inventa un nouveau nombre : $\sqrt{-1}$, ce nombre «imaginaire» est aujourd'hui noté i (notation introduite par Euler en 1777), et vérifie $i^2 = -1$

- (a) En utilisant ce nombre i , donner les solutions «imaginaires» de l'équation

$$X^2 + 36X + 1000 = 0$$

- (b) On pose $u = -3 + i$ et $v = -3 - i$. En utilisant les mêmes règles de développement que dans $\mathbb{R}$ et en remplaçant i^2 par -1 , calculer uv , u^3 et v^3 . Que remarque-t-on ?

- (c) Vérifier que $u + v$ est une solution de (E_2) .

4. Factoriser le polynôme $x^3 - 30x + 36$ par $(x - (u + v))$, puis achever la résolution de (E_2) .

¹Jérôme Cardan : médecin, philosophe, astrologue et mathématicien italien (1501 – 1576)

PARTIE I : Calcul de $\cos(2\pi/5)$

1. Résoudre l'équation $(E) : z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ (on donnera le résultat sous forme exponentielle).
2. Soit z une solution de (E) , on pose $Z = z + \frac{1}{z}$. Vérifier que $Z^2 = 1 - Z$ et déterminer les valeurs possibles de Z .
En choisissant convenablement z , en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

PARTIE II : Calcul de $\cos(2\pi/17)$

1. Résoudre l'équation $(F) : \sum_{k=0}^{16} z^k = 0$ (on donnera le résultat sous forme exponentielle).
2. Montrer que pour toute solution z de (F) et $\forall k \in \mathbb{Z}$, $z^{k+17} = z^k$, $\overline{z^k} = \frac{1}{z^k} = z^{17-k}$.
3. On pose $S = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^9 + z^{13} + z^{15} + z^{16}$ et $T = z^3 + z^5 + z^6 + z^7 + z^{10} + z^{11} + z^{12} + z^{14}$
 - (a) Justifier que S et T sont des nombres réels.
 - (b) Vérifier que $S + T = -1$ et $ST = -4$. Déterminer alors les valeurs possibles pour S et T .
4. Désormais, on note $\theta = \frac{2\pi}{17}$. On considère les deux réels

$$x_1 = 2[\cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(8\theta)] \quad \text{et} \quad x_2 = 2[\cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(6\theta) + \cos(7\theta)]$$
 - (a) Justifier que l'on peut choisir une solution w de l'équation (E) telle que $S = x_1$ et $T = x_2$.
 - (b) Vérifier que $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ et $\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{16\pi}{17}\right) = -2\cos\left(\frac{5\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right)$.
En déduire que $x_1 > 0$ et donner les valeurs de x_1 et x_2 .
5. Soit w la solution choisie à la question 4.a. On considère les quatre réels

$$\begin{aligned} y_1 &= w + w^4 + w^{13} + w^{16}, & y_2 &= w^2 + w^8 + w^9 + w^{15}, \\ y_3 &= w^3 + w^5 + w^{12} + w^{14}, & y_4 &= w^6 + w^7 + w^{10} + w^{11}. \end{aligned}$$
 - (a) Vérifier que $y_1 = 2\cos\theta + 2\cos(4\theta)$, puis que $y_1 > 0$.
 - (b) Calculer $y_1 + y_2$ et $y_1 y_2$ puis donner les valeurs exactes de y_1 et y_2 (en fonction de x_1).
 - (c) En procédant de la même façon avec y_3 et y_4 , déterminer les valeurs exactes de y_3 et y_4 (en fonction de x_2).
6. Soit w la solution choisie à la question 4.a. On considère pour finir les deux réels $z_1 = w + w^{16}$ et $z_2 = w^4 + w^{13}$.
Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$. Donner l'expression de z_1 et z_2 en fonction de y_1 et y_3 .
7. Déduire des questions précédentes que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 7\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{578 + 34\sqrt{17}}}}{16}$$

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) a démontré, à l'âge de 19 ans, que l'on peut calculer à l'aide de radicaux $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ si et seulement si n s'écrit sous la forme $n = 2^m p_1 \cdots p_r$ où m est un entier naturel quelconque et les p_i sont tous des nombres premiers impairs deux à deux distincts de la forme $2^{h_i} + 1$ (par exemple, pour $h = 0, 1, 2, 3, 4$ on obtient 3, 5, 17, 257, 65537 qui sont bien premiers, ce qui n'est pas le cas de pour $h = 5$). On peut donc calculer à l'aide de radicaux $\cos(2\pi/3)$, $\cos(2\pi/5)$, $\cos(2\pi/6)$, $\cos(2\pi/8)$ mais pas $\cos(2\pi/7)$ ni $\cos(2\pi/9)$. Ce résultat fut une grande percée car il permet de caractériser complètement tous les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas uniquement, prolongement magistral du travail commencé par les mathématiciens de l'Antiquité grecque. Gauss est l'un des plus grands génies des mathématiques de tous les temps, il a défriché quasiment tous les pans des mathématiques et ses travaux seront la source d'inspiration des plus grands mathématiciens durant plus d'un siècle après sa mort. A 5 ans où il calcula immédiatement $1 + 2 + \cdots + 100$, à 19 ans il démontra également la loi de réciprocité quadratique (Euler et Legendre en furent incapables) et créa les congruences, dans sa thèse (21 ans) il interpréta géométriquement les complexes et démontra que toute équation polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet des solutions dans $\mathbb{C}$, à l'âge adulte, il conçut une méthode d'étude des surfaces, qui lui fit comprendre l'existence de géométries non-euclidiennes, que généralisa Riemann et sans laquelle Einstein n'aurait jamais pu élaborer la théorie de la relativité générale, sans parler de ses travaux en probabilités (la fameuse courbe de Gauss), etc. Gauss fut mathématicien et il le resta jusqu'à sa mort puisqu'il demanda qu'un polygone régulier de 17 côtés soit gravé sur son tombeau et 1777 et 1855 sont des premiers entre eux ! Il fut également un astronome et un physicien émérite