DS 2 : *Nombres réels* *Nombres complexes*

Maths-PCSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Lundi 14 Novembre 2005.

.

Problème 1 : (12 points) Théorème de Morley.

Les trisectrices sont les droites qui découpent un angle en trois angles égaux. L'objet de ce problème est de présenter le théorème de Morley relatifs aux trisectrices d'un angle. Il est conseillé de dessiner des figures pour mieux maitriser le problème.

Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé direct qui permet de définir l'affixe complexe d'un point et l'image d'un nombre complexe.

Les nombres complexes a, b, c sont les affixes de trois points A, B, C.

Les nombres réels α, β, γ sont dans $]0, \frac{\pi}{3}[$ et vérifient

$$3\alpha = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}), 3\beta = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}), 3\gamma = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$$

mesure de l'angle orienté.

Les nombres complexes u, v, w sont définis par :

$$u = e^{2i\alpha}, v = e^{2i\beta}, w = e^{2i\gamma}$$

On définit aussi les transformations complexes R_a, R_b, R_c par :

$$\begin{aligned} R_a(z) &= u(z-a)+a \\ R_b(z) &= v(z-b)+b \\ R_c(z) &= w(z-c)+c \end{aligned}$$

Partie 1 : calculs préliminaires.

1) *(0.25 pts)* Soit $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$. Montrer que : $1 + j + j^2 = 0$.

2) *(0.75 pts)* Soit Z_1, Z_2, Z_3 trois points distincts d'affixes z_1, z_2, z_3 tels que :

$$z_1 + jz_2 + j^2 z_3 = 0$$

Mettre sous forme trigonométrique les trois nombres complexes

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}, \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}, \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

en déduire que le triangle (Z_1, Z_2, Z_3) est équilatéral.

3) *(0.75 pts)* Montrer que uv, vw, wu sont différents de 1 et que $uvw = j$.

4) *(0.5 pts)* Mettre sous forme trigonométrique les deux nombres complexes :

$$\frac{u(1-v)}{1-uv}, \frac{1-u}{1-uv}$$

5) *(1.5 pts)* On considère trois nombres complexes p, q, r vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (1-v)b + v(1-w)c &= p(1-vw) \\ (1-w)c + w(1-u)a &= q(1-wu) \\ (1-u)a + u(1-v)b &= r(1-uv) \end{aligned}$$

On pose

$$E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p + jq + j^2 r)$$

Montrer que

$$E = \frac{w}{u} j^2 (u^3 - 1)a + \frac{u}{v}(v^3 - 1)b + \frac{v}{w} j(w^3 - 1)c$$

Partie 2 : point fixe de $R_a \circ R_b$.

On appelle point fixe d'une transformation complexe f tout nombre complexe z tel que $f(z) = z$.

1) *(1.5 pts)* Reconnaitre les transformations géométriques associées aux transformations complexes R_a, R_b, R_c.

2) *(0.5 pts)* Montrer que $R_a \circ R_b$ a un unique point fixe r vérifiant

$$(1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$$

L'image du complexe r est le point R.

3) *(0.75 pts)* En soustrayant $(1-uv)a$ de chaque côté de la relation précédente, préciser l'angle $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AR}})$.

4) *(0.25 pts)* Préciser de même l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR}})$.

5) *(0.75 pts)* On définit de même p, P, q, Q à partir de

$$R_b \circ R_c(p) = p, R_c \circ R_a(q) = q$$

Reproduire sur votre copie une figure et y placer les points A, B, C, P, Q, R.

Partie 3 : configuration principale de Morley.

1) a) *(1.5 pts)* Ici R_c^3 désigne $R_c \circ R_c \circ R_c$. Montrer que l'image de $R_c^3(a)$ est le symétrique de A par rapport à la droite (BC).

b) *(0.5 pts)* Montrer que $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3$ est l'identité de $\mathbb{C}$.

2) *(1.5 pts)* Calculer $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(z)$. En déduire que

$$(1-u^3)a + u^3(1-v^3)b + u^3v^3(1-w^3)c = 0$$

3) *(1.5 pts)* Démontrer que le triangle (P, Q, R) est équilatéral (théorème de Morley).

Indication : Montrer que $E = 0$, puis en déduire que $p + jq + j^2 r = 0$ et enfin que le triangle (P, Q, R) est équilatéral.

Problème 2. (8 points) Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$.

On appelle sous groupe de $(\mathbb{R},+)$ est une partie H de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{array}{l} 0 \in H \\ \forall (x,y) \in H^2 : \quad x - y \in H \end{array}$$

On se propose de chercher la forme génèrale des sous groupes H de $(\mathbb{R},+)$ non réduits à $\{0\}$.

Partie 1. Résultats préliminaires.

1) *(0.5 pts)* Montrer que si $(x,y) \in H^2$, alors $-x \in H$ et $x+y \in H$.

2) *(0.5 pts)* Montrer que si $x \in H$ et $q \in \mathbb{Z}$, alors $qx \in H$.

3) *(0,75 pts)* Montrer que : $H \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset \Longleftrightarrow H \cap \mathbb{R}_-^* \neq \emptyset$.
En déduire que $H \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$, puis qu'elle admet une borne inférieure.
On pose alors $a = \inf(H \cap \mathbb{R}_+^*)$.

4) *(0,25 pts)* Enoncer la propriété caractéristique de la borne inférieure pour la partie $H \cap \mathbb{R}_+^*$.

Partie 1 : On suppose dans toute cette partie que : $a \neq 0$.

1) On suppose que $a \notin H$.

a) *(0,5 pts)* Soit $\varepsilon > 0$, montrer que :

$$\exists (x,y) \in H^2 \text{ tel que } a < y < x < a + \varepsilon$$

b) *(0.5 pt)* En choisissant un $\varepsilon = a$, tirer une contradiction, puis conclure que $a \in H$.

2) *(0,25 pt)* En déduire que : $a\mathbb{Z} \subset H$.

3) Soit $x \in H \cap \mathbb{R}_+^*, q = E\left(\frac{x}{a}\right)$ et $r = x - aq$.

a) *(0,5 pt)* Montrer que $r \in H$ et que $0 \leq r < a$.

b) *(0,5 pt)* En déduire que $r = 0$, puis que $x \in a\mathbb{Z}$.

c) *(0,25 pt)* Montrer enfin que $H = a\mathbb{Z}$

Partie 3. On suppose dans toute cette partie que : $a = 0$.

1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$.

a) *(0,25 pts)* Montrer que : $\exists b \in H$ tel que $0 < b < y - x$.

b) *(0,5 pts)* En deduire que : $x < E\left(\frac{y}{b}\right) b < y$.

c) *(0,5 pts)* Rappeler la definition d'une partie dense dans $\mathbb{R}$.

d) *(0,25 pts)* Conclure à propos de H.

2) *(0,5 pts)* Quelle est la forme générale des sous groupes de $(\mathbb{R},+)$.

3) Application :

a) *(0,75 pts)* Montrer que : $H = \{a + b2\pi$ tel que : $(a,b) \in Z^2\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$, puis qu'il est dense dans $\mathbb{R}$.

b) *(1,5 pts)* En déduire que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1,1]$.

Fin et bonne chance.