DS 2 : Nombres réels
Nombres complexes

Maths-PCSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Samedi 12 Novembre 2005.
Durée: 3 heures.

.

Partie 1 : calculs préliminaires.

1) $1+j+j^2 = \dfrac{1-j^3}{1-j} = 0$ car $j^3 = e^{2i\pi} = 1$.

2) On a : $z_1 + jz_2 + j^2 z_3 = 0$ et $1+j+j^2 = 0$
$$\begin{aligned} &\Longrightarrow z_1 + jz_2 = -j^2 z_3 \\ &\Longrightarrow z_1 + jz_2 = (1+j)z_3 \\ &\Longrightarrow z_1 - z_2 = j(z_3 - z_2) \\ &\Longrightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = j \end{aligned}.$$

D'autre part, en multipliantl'égalité par $z_1 + jz_2 + j^2 z_3 = 0$ par j, et vu que $j^3 = 1$, on obtient : $z_3 + jz_1 + j^2 z_2 = 0$, de façon pareille, on obtient $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = j$, et on multiplie encore une fois par j, on obtient : $z_2 + jz_3 + j^2 z_1 = 0$, et de façon pareille, on obtient aussi $\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = j$

Ainsi $\left|\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right| = |j| = 1$, d'où $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_2|$, mais aussi $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3|$, donc le triangle (Z_1, Z_2, Z_3) est équilatéral.

3) Supposons $uv = 1$, alors $e^{2i(\alpha+\beta)} = 1$, d'où $2(\alpha+\beta) \equiv 0 \quad [2\pi]$ et donc $\alpha + \beta \equiv 0 \quad [\pi]$, c'est à dire $\alpha + \beta = k\pi$, ce qui est impossible puisque α, β sont dans $]0, \frac{\pi}{3}[$, donc $uv \neq 1$ et de même on montre que vw et wu sont différents de 1.

D'autre part, on sait que la somme des angle d'un triangle vaut π, d'où $3(\alpha+\beta+\gamma) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \pi$, d'où $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{3}$ et par suite $uvw = e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = e^{2i\frac{\pi}{3}} = j$.

4)
$$\begin{aligned} \frac{u(1-v)}{1-uv} &= \frac{e^{2i\alpha}(1-e^{2i\beta})}{1-e^{2i\alpha}e^{2i\beta}} \\ &= \frac{e^{2i\alpha}(1-e^{2i\beta})}{1-e^{2i(\alpha+\beta)}} \\ &= \frac{e^{2i\alpha}(-2i\sin\beta e^{i\beta})}{-2i\sin(\alpha+\beta)e^{i(\alpha+\beta)}} \\ &= \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}e^{i\alpha} \end{aligned}$$

$$\text{De même } \frac{1-u}{1-uv} = \frac{1-e^{2i\alpha}}{1-e^{2i(\alpha+\beta)}} = \frac{-2i\sin\alpha e^{i\alpha}}{-2i\sin(\alpha+\beta)e^{i(\alpha+\beta)}} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}e^{-i\beta}$$

5) On a :

$$(1-uv)(1-vw)(1-wu)p = (1-uv)(1-wu)((1-v)b+v(1-w)c)$$

$$(1-uv)(1-vw)(1-wu)jq = (1-uv)(1-vw)j((1-w)c+w(1-u)a)$$

$$(1-uv)(1-vw)(1-wu)j^2r = (1-vw)(1-wu)j^2((1-u)a+u(1-v)b)$$

En sommant ces 3 égalités, le coéfficient de a dans E sera :

$$\begin{aligned} & (1-uv)(1-vw)jw(1-u)+(1-vw)(1-wu)j^2(1-u) \\ = & (1-vw)(1-u)j\left[(1-uv)w+(1-vw)j\right] \\ = & (1-vw)(1-u)j\left[(w-j+j-vwj)\right] \qquad (\text{ car } uvw=j) \\ = & (1-vw)(1-u)jw(1-vj) \\ = & \frac{w}{u}j^2(u^3-1)\frac{u(1-vw)(1-u)(1-vj)}{j(u^3-1)} \end{aligned}$$

En utilisant la formule $1-e^{i\theta} = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$, vérifier enfin que $\frac{u(1-vw)(1-u)(1-vj)}{j(u^3-1)} = 1$.

De même on raisonn e pour le coéfficient de b, puis celui de c.

Partie 2 : point fixe de $R_a \circ R_b$.

1) $R_a(z)-a = e^{2i\alpha}(z-a)$, donc R_a est la rotation de centre a et d'angle 2α.

$R_b(z)-b = e^{2i\beta}(z-b)$, donc R_b est la rotation de centre b et d'angle 2β.

$R_c(z)-c = e^{2i\gamma}(z-a)$, donc R_c est la rotation de centre c et d'angle 2γ.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z \text{ point fixe de } R_a\circ R_b & \Leftrightarrow R_a\circ R_b(z) = z \\ & \Leftrightarrow R_a(R_b(z)) = z \\ & \Leftrightarrow u(R_b(z)-a)+a = z \\ & \Leftrightarrow u[v(z-b)+b-a]+a = z \\ & \Leftrightarrow uvz-uvb+ub-ua+a = z \\ & \Leftrightarrow (1-u)a+u(1-v)b = z(1-uv) \end{aligned}$$

Donc $R_a\circ R_b$ a un unique point fixe $r = \frac{(1-u)a+u(1-v)b}{(1-uv)}$, et qui vérifie donc l'équation : $(1-u)a+u(1-v)b = r(1-uv)$

3) En soustrayant $(1-uv)a$ de chaque côté de la relation précédente, on obtient : $u(1-v)b-(1-v)ua = (r-a)(1-uv)$, donc

$$\frac{r-a}{b-a} = \frac{u(1-v)}{1-uv} = \frac{u(1-v)}{1-uv} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}e^{i\alpha}, \text{ donc}$$

$(\widehat{\vec{AB},\vec{AR}}) = \arg\left(\frac{r-a}{b-a}\right) \equiv \alpha \quad [2\pi]$ l'angle $(\widehat{\vec{AB},\vec{AR}})$.

4) De même, on montre que : $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BR}}) \equiv \beta \quad [2\pi]$.

5)

Partie 3 : configuration principale de Morley.

1) a) Soit $M(z)$ le point d'affixe $z = R_c^3(a)$, pour que M soit le symétrique de A par rapport à la droite (BC) il faut et il suffit que :

$\frac{A+M}{2} \in (BC)$ et que $\widehat{AM,BC} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

En effet : $R_c(a) = w(a-c)+c$, $R_c^2(a) = R_c\left(w(a-c)+c\right) = w^2(a-c)+c$ et enfin $z = R_c^3(a) = w^3(a-c)+c$.

Donc
$$\begin{aligned}\frac{b-\frac{a+z}{2}}{b-c} &= \frac{2b-a-z}{2(b-c)}\\ &= \frac{2b-a-w^3(a-c)-c}{2(b-c)}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{b-a-w^3(a-c)}{2(b-c)}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{b-c-w^3(a-c)+c-a}{2(b-c)}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{(1+w^3)(c-a)}{2(b-c)}\\ &= 1+\frac{1}{2}\frac{(1+w^3)(c-a)}{(b-c)}\end{aligned}$$

Et donc
$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{b-\frac{a+z}{2}}{b-c}\right) &\equiv \arg(1+w^3)-\arg\left(\tfrac{b-c}{a-c}\right) && [\pi]\\ &\equiv \arg\left(1+e^{6i\gamma}\right)-(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) && [\pi]\\ &\equiv \arg\left(2\cos(3\gamma)e^{3i\gamma}\right)-3\gamma && [\pi]\\ &\equiv 3\gamma-3\gamma && [\pi]\end{aligned}$$

Ainsi $\dfrac{b-\frac{a+z}{2}}{b-c}\in\mathbb{R}$, d'où M,B,C alignés.

D'autre part :
$$\begin{aligned}\widehat{AM,BC} &\equiv \arg\left(\frac{c-b}{z-a}\right) && [\pi]\ .\\ &\equiv \arg\left(\frac{c-b}{(1-w^3)(c-a)}\right) && [\pi]\\ &\equiv \arg\left(\frac{c-b}{(c-a)}\right)-\arg(1-w^3) && [\pi]\\ &\equiv (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}})-\arg(1-e^{6i\gamma}) && [\pi]\\ &\equiv 3\gamma-\arg\left(2i\sin(3\gamma)e^{3i\gamma}\right) && [\pi]\\ &\equiv 3\gamma-\arg\left(2\sin(3\gamma)e^{i(3\gamma+\frac{\pi}{2})}\right) && [\pi]\\ &\equiv 3\gamma-3\gamma-\tfrac{\pi}{2} && [\pi]\\ &\equiv -\tfrac{\pi}{2} && [\pi]\\ &\equiv \tfrac{\pi}{2} && [\pi]\end{aligned}$$

b) R_a, R_b, R_c sont des rotations d'angles respectifs $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$, donc R_a^3, R_b^3, R_c^3 seront des rotations d'angles respectifs $6\alpha, 6\beta, 6\gamma$, et donc $R_a^3\circ R_b^3\circ R_c^3$ sera une rotation d'angle
$$6\alpha+6\beta+6\gamma = 2\left((\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})+(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})+(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})\right)=2\pi$$
C'est donc l'identité.

2) On a $R_a^3(z)=u^3(z-a)+a$, $R_b^3(z)=v^3(z-b)+b$, $R_c^3(z)=w^3(z-c)+c$.

Donc
$$\begin{aligned}R_a^3\circ R_b^3\circ R_c^3(z) &= R_a^3\circ R_b^3(w^3(z-c)+c)\\ &= R_a^3\left(v^3(w^3(z-c)+c-b)\right)\\ &= u^3((v^3(w^3(z-c)+c-b))-a)+a\\ &= u^3v^3w^3z+(1-u^3)a+u^3(1-v^3)b+u^3v^3(1-w^3\\ &= z+(1-u^3)a+u^3(1-v^3)b+u^3v^3(1-w^3)c\end{aligned}$$

Or $R_a^3\circ R_b^3\circ R_c^3(z)=z$, d'où $(1-u^3)a+u^3(1-v^3)b+u^3v^3(1-w^3)c=0$.

3) On sait que $uvw=j$, donc :
$$\begin{aligned}E &= \frac{w}{u}j^2(u^3-1)a+\frac{u}{v}(v^3-1)b+\frac{v}{w}j(w^3-1)c\\ &= u^2v^2w^3(u^3-1)a+\frac{u}{v}(v^3-1)b+uv^2(w^3-1)c\\ &= (1-u^3)a+u^3(1-v^3)b+u^3v^3(1-w^3)c\end{aligned}$$

On multiplie par $-u^2v$, d'où :

$-u^2vE=(1-u^3)a+u^3(1-v^3)b+u^3v^3(1-w^3)c=0$, et donc $E=0$ or $E=(1-uv)(1-vw)(1-wu)(p+jq+j^2r)$ et uv, vw, wu sont différents de 1, donc $p+jq+j^2r=0$.

Et alors $p-q=-q(j+1)-j^2r=j^2(q-r)$ car $1+j+j^2=0$, d'où $|p-q|=|q-r|$ et de même on montre que $|p-q|=|p-r|$.

D'où le triangle (P,Q,R) est équilatéral.

Problème 2. Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$.

Partie 1. Résultats préliminaires.

1) Noter d'abord que si $(x,y)\in H^2$, alors $-y=0-y\in H$ et donc $x+y=x--y\in H$

2) Soit $x\in H$ et $q\in\mathbb{Z}$.

Si $q\in\mathbb{N}$ alors $qx=\overbrace{x+x\ldots+x}^{q\text{ fois}}\in H$.

Si $q\in\mathbb{Z}_-$ alors $qx=\overbrace{-x-x\ldots-x}^{|q|\text{ fois}}\in H$.

3) $$\begin{aligned} H\cap\mathbb{R}_+^*\neq\emptyset &\iff \exists x>0 \text{ tel que } x\in H\\ &\iff \exists -x<0 \text{ tel que } -x\in H\\ &\iff H\cap\mathbb{R}_-^*\neq\emptyset\end{aligned}.$$

On a $H\cap\mathbb{R}\neq\emptyset$, donc $H\cap\mathbb{R}_+^*\neq\emptyset$ ou bien $H\cap\mathbb{R}_-^*\neq\emptyset$, mais dans tous les cas ça implique que : $H\cap\mathbb{R}_+^*\neq\emptyset$, ainsi $H\cap\mathbb{R}_+^*$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, minorée par 0, donc admet une borne inférieure $a=\inf(H\cap\mathbb{R}_+^*)$.

4) $\forall\varepsilon>0,\quad\exists x\in H\cap\mathbb{R}_+^*$ tel que $a\leq x<a+\varepsilon$.

Partie 1 : On suppose dans toute cette partie que : $a\neq 0$.

1) a) Comme $a\notin H$ et $x\in H$, la propriété caractéristique de la borne inférieure pour la partie $H\cap\mathbb{R}_+^*$ devient $\forall\varepsilon>0,\quad\exists x\in H\cap\mathbb{R}_+^*$ tel que $a\leq x<a+\varepsilon$.

On applique une autre fois la propriété caractéristique de la borne inférieure pour la partie $H\cap\mathbb{R}_+^*$, avec $\varepsilon=x-a>0$, alors $\exists y\in H\cap\mathbb{R}_+^*$ tel que $a\leq y<a+x-a=x$.

b) De ce qui précède on conclut que $0<x-y<\varepsilon=a=\inf(H\cap\mathbb{R}_+^*)$, or $x-y\in H$, d'où $x-y\in H\cap\mathbb{R}_+^*$, ce qui est impossible, d'où $a\in H$.

2) $a\in H\Longrightarrow\forall q\in\mathbb{Z},\quad qa\in H\Longrightarrow a\mathbb{Z}\subset H$.

3) a) $r=x-aq\in H$ car $x\in H$ et $aq\in H$, d'autre part : $\frac{x}{a}-1<q=E\left(\frac{x}{a}\right)\leq\frac{x}{a}$, d'où $x-a<qa\leq x$ et donc $0\leq r=x-qa<a$.

b) Si $r\neq 0$, alors $r>0$ et $r\in H$, donc $r\in H\cap\mathbb{R}_+^*$, or $r<a=\inf(H\cap\mathbb{R}_+^*)$, ce qui est absurde, d'où $r=0$ et par suite $x=qa\in a\mathbb{Z}$.

c) D'aprés 3.b) $H\subset a\mathbb{Z}$ et d'aprés 2) $a\mathbb{Z}\subset H$, d'où égalité.

Partie 3. On suppose dans toute cette partie que : $a=0$.

1) Utiliser la propriete caracteristique de la borne inferieure pour $H\cap\mathbb{R}_+^*$, avec $\varepsilon=y-x$ et $a=\inf(H\cap\mathbb{R}_+^*)=0$.

a) Montrer que : $\exists b\in H$ tel que $0<b<y-x$.

b) $\dfrac{y}{b}-1<E\left(\dfrac{y}{b}\right)<\dfrac{y}{b}\Longrightarrow y-b<E\left(\dfrac{y}{b}\right)b<y\Longrightarrow x<E\left(\dfrac{y}{b}\right)b<y$, car $x<y-b$.

c) Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad\exists a\in A$ tel que $x<a<y$.

d) H est dense dans $\mathbb{R}$..

2) Les sous groupes de $(\mathbb{R},+)$ sont soit denses dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a\in\mathbb{R}^+$.

3) Application :

a) $0=0+02\pi\in H$ et si $(x=a+b2\pi,y=c+d2\pi)\in H^2$, alors $x-y=a-c+2\pi(b-d)\in H$, donc H est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$, supposons qu'il est de la forme $a\mathbb{Z}$, on a $(1,2\pi)\in H^2$ donc $\exists(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $1=aq$ et $2\pi=ap$, d'où $2\pi=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, absurde et donc H est forcément dense dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $x,y\in[-1,1]$ tel que $x<y$ et soit $(\alpha,\beta)\in[-1,1]$ tel que $\cos\alpha=x,\cos\beta=y$.

H dense dans $\mathbb{R}$ donc dans $[\pi,2\pi]$, et donc $\exists(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $\alpha<a+2b\pi<\beta$, or cos est croissante sur $[-1,1]$, d'où $\cos\alpha<\cos(a+2b\pi)<\cos\beta$, c'est à dire $x<\cos a<y$. Si $a\in\mathbb{N}$ c'est fini, sinon alors $-a\in\mathbb{N}$ et $\cos(-a)=\cos a$, donc la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1,1]$.

$\boxed{\text{Fin et la prochaine}}$